ORTAÖĞRETİM

Matematik

9. Sınıf

Ders Kitabı

Yazarlar

Cem DEMİRCİ
Dilek TEKER
Esat AVCI
Gözde Aslı ÖZCAN
İsmail Hakkı ÜSTÜNEL
Kadır ÖZCAN
Özgür ŞEKER
Sercan EMEK
Sunullah KARABUDAK
Süleyman DOĞAN
Turgay KIZGIN
Yasemin YARDIM



DEVLET KİTAPLARI
..............................., 2024

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI .... : 9617
DERS KİTAPLARI DİZİSİ .... : 2038

Her hakkı saklıdır ve Millî Eğitim Bakanlığına aittir. Kitabın metin, soru ve şekilleri kısmen de olsa hiçbir surette alınıp yayımlanamaz.

Editör
Prof. Dr. Abdulkadir ERDOĞAN
Prof. Dr. Hakan YAMAN
Prof. Dr. Soner DURMUŞ
Doç. Dr. Ayşe YOLCU
Doç. Dr. Nadide YILMAZ

Dil Uzmanları
Eflak MALGACA VARGEL
Hilal ASLAN
Neslihan ARICA

Görsel Tasarımcılar
Çiğdem ÖKCÜN
Hilal YAŞAR
Meltem KORKMAZ
Mustafa ÇAKIR
Nevrez AKIN
Özcan ATAK

Program Geliştirme Uzmanları
Doç. Dr. Recep KAHRAMANOĞLU
Doç. Dr. Serkan ASLAN
Demet YILMAZ
Nedim DENİZLİ
Nurgül KENDİRLİOĞLU GÜNHAN

Ölçme ve Değerlendirme Uzmanları
Dr. Öğr. Üyesi Halime YILDIRIM HOŞ
Dr. Öğr. Üyesi Sinem ŞENFERAH
Cuma GÜÇ
Dilay AK
Nuray SUNAR

Rehberlik Uzmanları
Berna Serap TÜRK
Hilal DEMİRBAĞ

Baskı
Baskı Matbaanın Adı ve
Ticaret Ünvanı
Tel.: (0000) 000 00 00

ISBN 978-975-11-8056-8

Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığının 17.07.2024 tarih ve 110460855 sayılı yazısı ile eğitim aracı olarak kabul edilmiştir.



İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

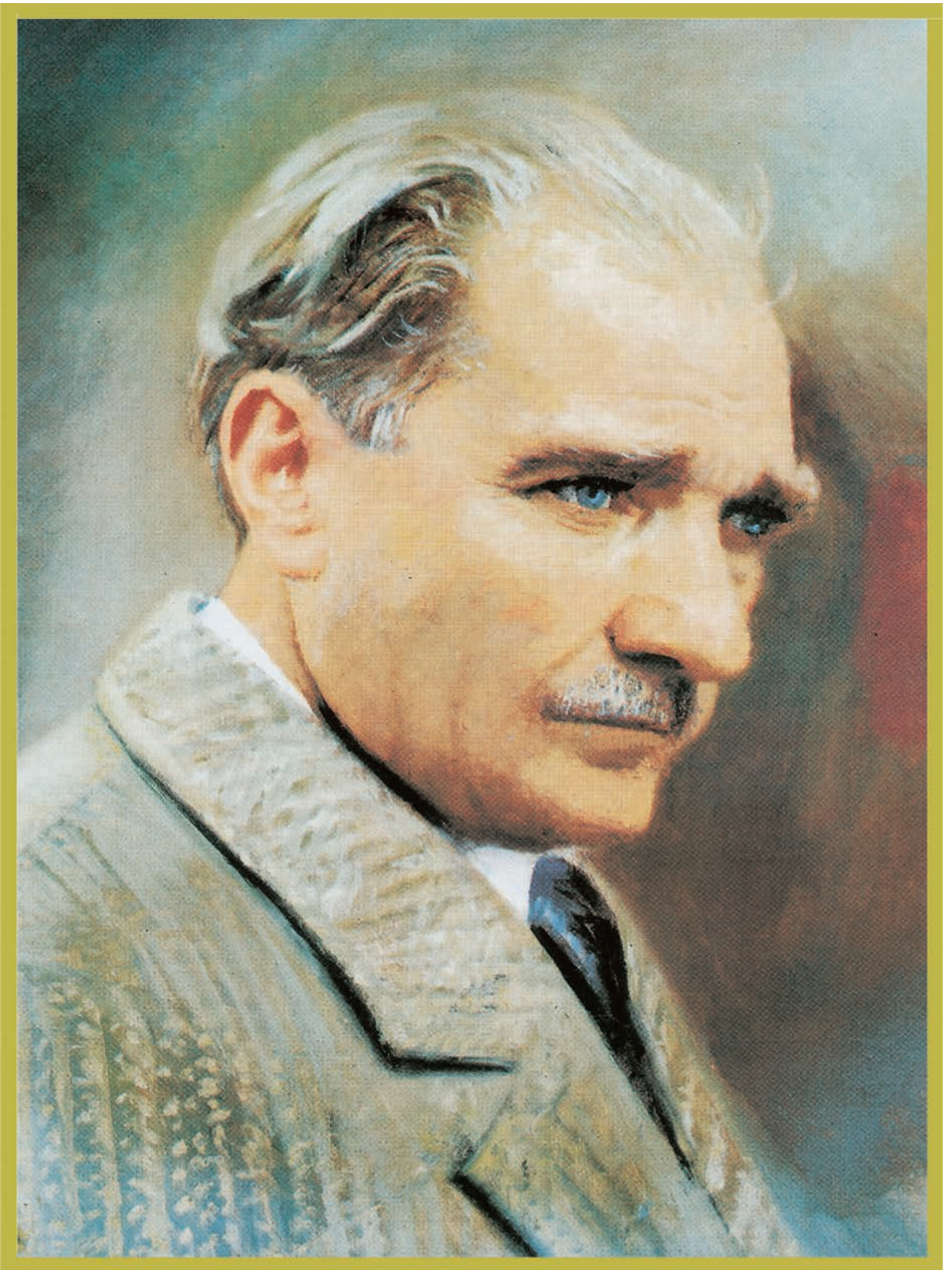
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İçindekiler

Kitabın dijital kopyalarında "İçindekiler" sayfasında başlıklar üzerine tıklayarak ilgili sayfalara, iç sayfalarda da Tema isimleri üzerine tıklayarak "İçindekiler" sayfasına ulaşabilirsiniz.



Kitabın Tanıtımı

Temanın adı

Temanın işleniş sırası

Temanın kapsamı hakkında bilgi veren anahtar kavramlar

Temada kullanılan sembol ve gösterimler

Temada öğrenciden beklenen görev ve sorumlulukların belirtildiği alan

Temanın konu başlıkları

Tema sunumuna ve diğer e-içeriklere yönlendiren karekodlar

Sayılar

1. TEMA

1.1. Gerçek Sayıların Üslü ve Köklü Gösterimleri ile Yapılan İşlemler

1.2. Gerçek Sayı Aralıklarının Gösteriminde ve Aralıklarla İlgili İşlemlerde Küme Sembol ve İşlemleri

1.3. Sayı Kümelerinin Özellikleri

1.4. Gerçek Sayıların İşlem Özellikleri

Temada öğrenme çıktıları bağlamında gerçekleştirilmesi beklenen beceriler

Temaya giriş niteliğinde, temanın diğer disiplinlerle ve gerçek yaşamla ilişkisini yansıtan alan

Önceki yıllarda edinilen, temanın gerektirdiği bilgi ve becerileri içeren çalışmaların bulunduğu alan

Ön Değerlendirme

1. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) 0,19 + 2,01

5. Aşağıda verilen aralıkları sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

a) (−3, 3)

Temaya ait öğrenme çıktısı

1.1. GERÇEK SAYILARIN ÜSLÜ VE KÖKLÜ GÖSTERİMLERİ İLE YAPILAN İŞLEMLER

Merak uyandıran, önceki bilgi ve becerilerden temanın içerdiği bilgi ve becerilere geçişi sağlayan alan

Konuya Başlarken

Aşağıda gerçek yaşam durumlarında karşılaşılan bazı sayı gösterimlerine yer verilmiştir.

- 1 gram alüminyumun sıcaklığının 1 °C artması için alüminyuma 0,21 kal ısı verilmelidir.

Tanım, kural veya özelliklerin hatırlatıldığı alan

İkizkenar üçgenin taban açılarının ölçüleri birbirine eşittir.

a) [CP çizildiğinde oluşan ABC üçgeninde $m(\widehat{ABP}) = x$ alınırsa $|AB| = |AC|$ olduğundan $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 180° - x$ olur.

Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamından $180° - x + 180° - x + 40° = 180°$ olur.

Buradan x = 110° bulunur.

Tanım veya kuralların verildiği alan

Bir üçgende en uzun kenar karşısında ölçüsü en büyük olan açı, en kısa kenar karşısında ölçüsü en küçük olan açı bulunur. Bu ifadenin tersi de doğrudur.

Süreç bileşenlerinin bir görev veya problem bağlamında işletildiği alan

1. Uygulama

Gerçek Sayıların Üslü Gösterimleri

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Tabloda verilen üslü gösterimlerin sonuçlarını örnekteki gibi bularak tabloyu uygun şekilde doldurunuz.

Tema ile ilgili çözümlü örneklerin sunulduğu alan

1. ÖRNEK

Evrendeki canlı ve cansız varlıkların atomlardan oluştuğu bilinmektedir. İnsan vücudundaki atom sayısı, insanın kütlesi (kg) ile 10^{26} sayısı çarpılarak yaklaşık olarak hesaplanabilir. $6,02 \cdot 10^{23}$ tane atom, 1 mol kabul edilmektedir.

Buna göre kütlesi 66,22 kg olan bir kişinin vücudunda yaklaşık kaç mol atom olduğunu bulunuz.

Konu içinde çözümü verilmeyen görevlerin yer aldığı alan

1. Sıra Sizde

Newton'ın (Nivtın) evrensel kütle çekim teorisine göre yer çekimi sabiti G olmak üzere $G = 6,673 \cdot 10^{-11}\ m^3/(kg \cdot sn^2)$ olarak hesaplanmıştır. Gezegenlerin yer çekimi kuvveti (m/sn²), yer çekimi sabiti yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

$g = G \cdot \frac{M}{R^2}$

Soruya ait örnek çözümün yer aldığı alan

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Tabloda verilen üslü gösterimlerin sonuçlarını örnekteki gibi bularak tabloyu uygun şekilde doldurunuz.

Üslü Gösterim	Sonuç
$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

Ulaşılan bilgi, kural, önerme veya sonuçların özetlendiği alan

Kontrol Noktası

a, b, c birer gerçek sayı; x, y sıfırdan farklı gerçek sayı; m, n birer tam sayı olsun. Üslü gösterimler ile aşağıdaki işlemler yapılabilir.

- $a \cdot x^m + b \cdot x^m - c \cdot x^m = (a + b - c) \cdot x^m$
- $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

Tema ile ilgili araştırma ödevlerinin verildiği alan



Derecelendirme ölçeğine ulaşmak için karekodu okutunuz.

Araştırma Ödevi

Aşağıda verilen adımları gerçekleştirerek araştırma ödevini zamanında ve eksiksiz olarak tamamlayınız.

- 1 ışık yılının kaç km olduğunu ışık hızından yararlanarak hesaplayınız ve bilimsel gösterimle ifade ediniz.
- Güneş sisteminde bulunan üç gezegen belirleyip bu gezegenlerin birbirlerine olan uzaklıklarının kaç km olduğunu araştırarak bilimsel gösterimle ifade ediniz.
- Hidrojen atom çekirdeğinin çapının kaç m olduğunu araştırarak bilimsel gösterimle ifade ediniz.
- Atmosferdeki karbondioksit miktarının kaç ppm olduğunu araştırarak bilimsel gösterimle ifade ediniz.

Tema ile ilgili performans görevlerinin verildiği alan

Performans Görevi

Aydınlatma Ürünlerinin Enerji Verimliliği

η_{TM}, bir optik sistemdeki ışık geçiş verimliliğini ifade eden verimlilik katsayısıdır. Işığın optik sisteme girişinden çıkışına kadar ışık enerjisinin ne kadarının sistemi geçtiği, ne kadarının sistemde kaybolduğu bu verimlilik katsayısıyla ifade edilir. 1 Eylül 2021'de yürürlüğe giren yasa ile aydınlatma ürünleri

Tema ile ilgili proje ödevlerinin verildiği alan

Proje Ödevi

Doğrusal Fonksiyonlarla İfade Edilebilen Denklem ve Eşitsizlikler

Bu projede sizden doğrusal fonksiyonlarla ifade edilebilen bir gerçek yaşam problemi belirlemeniz, belirlediğiniz problem için kullanılabilecek denklem veya eşitsizlikleri oluşturarak problemi çözmeniz, kullandığınız denklem ve eşitsizliklerin farklı problem durumlarında nasıl kullanılabileceğini belirlemeniz ve

Öğrenme çıktısı ile ilgili görevlerin bulunduğu alan

Alıştırmalar

1 ve 2. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplayınız.

Aşağıdaki tabloda bazı şehirlerin yüz ölçümleri ve 2023 yılındaki nüfusları yaklaşık olarak verilmiştir.

Şehir	Yüz Ölçümü (km²)	Yaklaşık Nüfus

Tema ile ilgili ölçme ve değerlendirme çalışmalarının yer aldığı alan

Ölçme ve Değerlendirme

Bu bölümde cevaplamanız için farklı soru tiplerinde 13 adet soru bulunmaktadır.
Ölçme ve değerlendirme bölümünün sonunda verilen karekodu okutarak ek sorulara ulaşabilirsiniz.

1. Aşağıdaki tabloda bazı gök cisimlerinin kütleleri (kg) yaklaşık olarak verilmiştir.

2. Semih Bey, kare şeklindeki bahçesinin dikdörtgen şeklindeki bir bölümünü otopark olarak kul-

Temada öğrenilenlerin not edilmesi için ayrılan alan

Farklı Kaydet

Bu temada öğrendiğiniz bilgileri kendi hatırlayacağınız şekilde bu alana kısaca not edebilirsiniz.

Konu ile ilgili kişi, kurum ve olaylar hakkında önemli tarihsel bilgilerin yer aldığı alan

Matematik Tarihinden Notlar

Atatürk ve Geometri



Mustafa Kemal Atatürk'ün yazdığı *Geometri* adlı kitap, Türkiye'deki geometri öğretiminin kilometre taşlarından biridir. 3 bölümden oluşan 44 sayfalık bu kitapta birçok geometrik kavram tanımlanmıştır. Atatürk, bu önemli eserinde Arapça ve Farsça kökenli geometri terimleri yerine çoğu günümüzde kullanılmaya devam eden Türkçe geometri terimleri üretmiştir. Bu terimlerin bazıları içinse günümüzde farklı kullanımlar söz konusudur [zâviyetân-ı mütevâfikatân yerine yöndeş açı, re'sen mütekabil zâviye yerine ters açı, kaim zaviyeli müselles yerine dikey üçgen (günümüzde dik üçgen), müselles-i mütesâviyü'l-adlâ yerine eşkenar üçgen, müselles-i mütesâviyü'ssâkeyn yerine ikizkenar üçgen

SEMBOLLERİN AÇIKLAMASI

Başlarken 

Konuya Başlarken 

Kontrol Noktası 

Farklı Kaydet 

Çalışmanın bittiği yer 

Uygulamanın başladığı yer 

Uygulamanın bittiği yer 

Bireysel uygulama 

Grup uygulaması 

Rehberli uygulama 

Ders öncesi hazırlık gerektiren çalışma 

Hesap makinesi gerektiren soru 

Ön Değerlendirme 

Sonraki sayfada devam eden çalışma 

Önceki sayfadan devam eden çalışma 

İçindekiler, Alıştırmalar, Ölçme ve Değerlendirme 

1. TEMA

Sayılar

1.1. Gerçek Sayıların Üslü ve Köklü Gösterimleri ile Yapılan İşlemler
1.2. Gerçek Sayı Aralıklarının Gösteriminde ve Aralıklarla İlgili İşlemlerde Küme Sembol ve İşlemleri
1.3. Sayı Kümelerinin Özellikleri
1.4. Gerçek Sayıların İşlem Özellikleri

▶ Anahtar Kavramlar

- alt küme
- ancak ve ancak
- aralık
- bazı
- bilimsel gösterim
- birleşim işlemi
- boş küme
- eşitsizlik
- fark işlemi
- her
- ise
- ispat
- kesişim işlemi
- köklü gösterim
- küme
- kümenin elemanı
- mutlak değer
- önerme
- önermenin değili
- özdeşlik
- tümleme
- üslü gösterim
- ve
- veya
- ya da

▶ Sembol ve Gösterimler

- $\in, \notin, \varnothing, \cap, \cup, \setminus, \subseteq, s(A)$
- $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$
- $\{x \mid x$ in sahip olduğu tanımlayıcı özellikler$\}$
- $<, \leq, >, \geq, |a|, x^n, \sqrt[n]{x}$
- $\wedge, \vee, \veebar, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$
- $(a, b), [a, b]$
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}', \mathbb{R}$

▶ Bu temada sizden

- gerçek sayıların üslü ve köklü gösterimleriyle yapılan işlemlere dair muhakeme yapabilmeniz,
- gerçek sayı aralıklarının gösteriminde ve aralıklarla ilgili işlemlerde küme sembol ve işlemlerinden yararlanabilmeniz,
- farklı sayı kümelerinin özellikleri hakkında muhakeme yapabilmeniz,
- gerçek sayıların işlem özelliklerini cebirsel olarak ifade etmede analojik akıl yürütebilmeniz

beklenmektedir.

Tema boyunca sizden çalışma kâğıtlarındaki soruları çözmeniz, performans görevlerini yerine getirmeniz, ölçme ve değerlendirme sorularını çözmeniz beklenmektedir.



Tema karekodu



Tema sunusuna ulaşmak için karekodu okutunuz.

Başlarken 

Günlük hayatta çoğunlukla tam sayılar kullanılırken fizik, kimya, biyoloji, ekonomi, astronomi, mühendislik gibi alanlarda farklı sayılara ihtiyaç duyulmaktadır. Örneğin mikroskobik canlıların kütlesini hesaplarken çok küçük sayılara, gezegenler arası uzaklıkları ifade ederken çok büyük sayılara ihtiyaç duyulmaktadır. Eş kenar uzunlukları 1 birim olan ikizkenar dik üçgende hipotenüs uzunluğunu ifade etmek için köklü gösterimden yararlanılmaktadır. Bir bitkinin ideal koşullarda yetiştirilmesini sağlayan sıcaklık değerlerini ifade etmek için gerçek sayı aralıkları kullanılmaktadır. Örneklerde verilen durumları ifade ederken gerçek sayıların ondalık, üslü, köklü gösterimlerinden ve gerçek sayı aralıklarından yararlanılmaktadır.



Ön Değerlendirme

1. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) $0{,}19 + 2{,}01$

b) $\dfrac{0{,}219 - 0{,}009}{2{,}1}$

c) $(-0{,}2) \cdot (0{,}1) : 0{,}004$

2. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 \cdot 0{,}16$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

3. Aşağıda verilen köklü gösterimleri kök dışına çıkartarak ulaştığınız sonuçların rasyonel sayı olup olmadıklarını belirleyiniz.

a) $\sqrt{49}$

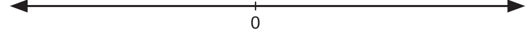
b) $\sqrt{1{,}69}$

c) $-\sqrt{\dfrac{64}{81}}$

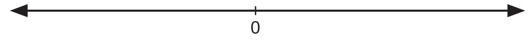
4. 14,076 **sayısının basamak değerlerini belirleyiniz.**

5. Aşağıda verilen aralıkları sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

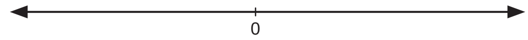
a) $(-3, 3)$



b) $[4, 9)$

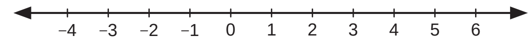


c) $[-8, -5]$



6. Aşağıda verilen gerçek sayıların sayı doğrusu üzerindeki yaklaşık yerini gösteriniz.

a) $\sqrt{8}$ **b)** $-\sqrt{11}$ **c)** $\sqrt{29}$



7. Aşağıda kenar uzunlukları verilen dikdörtgen ve kare ile yarıçap uzunluğu verilen dairenin çevre uzunluklarının ve alanlarının cebirsel temsilini yazınız (π **yerine 3 alınız.).**

a) A 2a+b B, 2a–b, D C

Çevre = ...

Alan = ...

b) A 3y B, 3y, D C

Çevre = ...

Alan = ...

c) O 4x A

Çevre = ...

Alan = ...

1.1. GERÇEK SAYILARIN ÜSLÜ VE KÖKLÜ GÖSTERİMLERİ İLE YAPILAN İŞLEMLER

Konuya Başlarken 

Aşağıda gerçek yaşam durumlarında karşılaşılan bazı sayı gösterimlerine yer verilmiştir.

- 1 gram alüminyumun sıcaklığının 1 °C artması için alüminyuma 0,21 kal ısı verilmelidir.
- İnsan beynindeki nöron sayısı, yaklaşık olarak $8{,}6 \cdot 10^{10}$ tanedir.
- Birbirlerine en yakın konumdayken Uranüs ile Dünya arasındaki uzaklık yaklaşık $2{,}57 \cdot 10^{9}$ km'dir.
- Nötron, atom çekirdeğinde bulunan ve kütlesi $1{,}675 \cdot 10^{-24}$ gram olan tanecikti.
- Yüzey alanı 21 m^2 olan kare şeklindeki bir halının bir kenarının uzunluğu $\sqrt{21}$ m'dir.
- Atletizm 100 m koşusunda dünya rekoru 9,58 sn. olup Usain Bolt (Yuseyn Bolt) tarafından kırılmıştır.

Buna göre aşağıdaki sorularla ilgili fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

1. Üslü veya köklü gösterimlerin yararları neler olabilir?

2. Çeşitli bilim dallarında kullanılan üslü ve köklü gösterimler neler olabilir? Örnekler veriniz.

3. 100 metrelik bir koşu yarışında sporcuların yarışı bitirme dereceleri ifade edilirken neden ondalık gösterime ihtiyaç duyulmaktadır?

Gerçek sayıların üslü ve köklü gösterimleri, matematikte ve gerçek yaşamda birçok alanda kullanılmaktadır. Üslü gösterimler çok büyük ve çok küçük sayılarla yapılan işlemlerde kolaylık sağlamaktadır. Köklü gösterimler fizik, mühendislik, astronomi ve ekonomi gibi alanlarda yapılan hesaplamalarda kullanılmaktadır.

Gerçek Sayıların Üslü Gösterimi

Aşağıda gerçek yaşamda karşılaşılan çok büyük veya çok küçük sayı örnekleri verilmiştir.

- Işık hızının yaklaşık değeri, saatte 1 080 000 000 km'dir.
- İnsan vücudundaki atom sayısının yaklaşık değeri, 29 basamaklı 100000...0 sayısı ile ifade edilebilir.
- Arşimet, tüm evreni doldurmak için gereken kum tanesi sayısını ifade etmek için 63 basamaklı 800…0 sayısını kullanmıştır.
- Evrendeki yıldızların sayısının yaklaşık değeri, 23 basamaklı 10…0 sayısı ile ifade edilebilir.
- Bir hidrojen atomunun çekirdeğinin çapı 0,00000000000000175 metredir.

Verilen örneklerdeki sayıların yazılması ve okunması oldukça zordur. Üslü gösterim çok büyük veya çok küçük sayıların yazımında ve bu sayılarla yapılan işlemlerde kolaylık sağlamaktadır. Astronomi, mühendislik, ekonomi, bilgisayar bilimleri gibi alanlarda üslü gösterimler kullanılarak karmaşık problemlerin çözümü daha etkin şekilde yapılabilir.

1. Uygulama



Gerçek Sayıların Üslü Gösterimleri

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Tabloda verilen üslü gösterimlerin sonuçlarını örnekteki gibi bularak tabloyu uygun şekilde doldurunuz.

Üslü Gösterim	Sonuç
$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$
$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	
$(-2)^5$	
$(-1)^6$	
-3^4	
8^0	$8^0 = 1$
12^0	
$(-6)^0$	
0^5	
4^{-1}	$4^{-1} = \frac{1}{4}$
3^{-2}	
$(-5)^{-3}$	
$(-3)^{-4}$	
$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$	
$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$	

2. Üslü gösterimlerle ilgili ulaştığınız sonuçları sözel olarak ifade ediniz.

a sıfırdan farklı gerçek sayı, n pozitif tam sayı olmak üzere a^n ifadesine **üslü gösterim** denir. Bu gösterimde a sayısı **taban**, n sayısı **üs** veya **kuvvet** olarak isimlendirilir.

n pozitif tam sayı ise $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ tane}}$ olur.

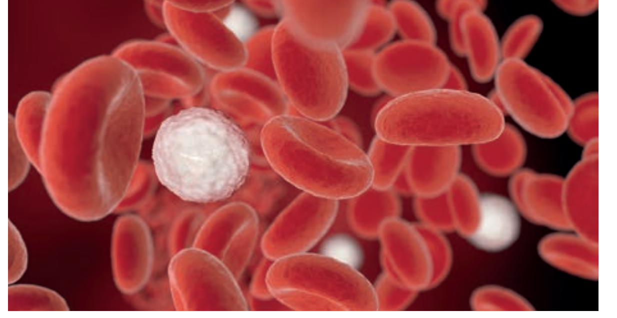
a sıfırdan farklı gerçek sayı ve n pozitif gerçek sayı olmak üzere $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ve $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ olur.

n negatif tam sayı ise $a^n = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{|n| \text{ tane}}}$ olur. $a^0 = 1$'dir. $0^a = 0$'dır.

Gerçek Sayıların Üslü Gösterimleriyle Yapılan Toplama ve Çıkarma İşlemleri

İnsan kanı, plazma adı verilen sıvıdan ve kan hücrelerinden oluşur (Görsel 1.1). Kan hücreleri; alyuvarlar, akyuvarlar ve trombositler olmak üzere üç çeşittir. Bir laboratuvarda incelenen kanın 1 litresinde $5 \cdot 10^9$ alyuvar, $6 \cdot 10^6$ akyuvar ve $0,2 \cdot 10^9$ trombosit hücresi bulunduğu tespit edilmiştir.

Kandaki alyuvar ve trombosit hücrelerinin toplam sayısını ya da alyuvar hücresi sayısının trombosit hücrelerinin sayısından kaç fazla olduğunu hesaplamak için hangi matematiksel işlemlere ihtiyaç duyulur?



Görsel 1.1: *Kan hücrelerinin görüntüsü*

2. Uygulama



Üslü Gösterimlerle Toplama ve Çıkarma İşlemi

Verilen bilgileri inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

n tam sayı; a, b, x birer gerçek sayı ve x sıfırdan farklı olsun.

1. Üslü gösterimlerle $a \cdot x^n + b \cdot x^n$ ve $a \cdot x^n - b \cdot x^n$ işlemlerinin sonuçları nasıl bulunabilir? Varsayımlarınızı oluşturunuz.

2. Tabloda verilen işlemlerin sonuçlarını örneklerdeki gibi bularak uygun yerlere yazınız.

İşlem	Ortak Çarpan Parantezindeki İşlem	Sonuç
$3 \cdot 2^{10} + 2^{10}$	$(2^{10} + 2^{10} + 2^{10}) + 2^{10} = (3 + 1) \cdot 2^{10}$	$4 \cdot 2^{10}$
$5 \cdot 3^{12} - 2 \cdot 3^{12}$	$(5 - 2) \cdot 3^{12}$	$3 \cdot 3^{12}$
$-7 \cdot 11^5 + 4 \cdot 11^5$		
$0,4 \cdot 5^7 + 2,1 \cdot 5^7$		
$3 \cdot 10^5 - 10^5 + 2,5 \cdot 10^5$		
$a \cdot 5^4 + b \cdot 5^4$		
$a \cdot x^n + b \cdot x^n$		
$a \cdot x^n - b \cdot x^n$		

3. Tabloda elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak üslü gösterimlerle toplama ve çıkarma işlemleriyle ilgili genellemeler oluşturunuz.

4. Varsayımlarınızla genellemelerinizi karşılaştırarak üslü gösterimlerle toplama ve çıkarma işlemlerine dair önermelerinizi oluşturunuz.

5. Oluşturduğunuz önermeler yardımıyla aşağıda verilen problemi çözünüz. Önermelerin problemin çözümünde ne tür kolaylıklar sağladığını ve başka hangi problem durumlarında kullanılabileceğini yazınız.

Aynı doğrultuda bulunduklarında Merkür ve Jüpiter'in merkezlerinin Güneş'e yaklaşık uzaklıkları sırasıyla $5{,}8 \cdot 10^7$ km ve $7{,}5 \cdot 10^8$ km'dir. Buna göre Merkür ve Jüpiter'in merkezlerinin arasındaki uzaklık yaklaşık kaç km'dir?

6. Oluşturduğunuz önermeleri cebirsel olarak doğrulayınız. Doğrulama yöntemlerinizi sınıf arkadaşlarınızın kullandığı yöntemlerle karşılaştırarak kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

Tabanı ve üssü aynı olan üslü gösterimler, ortak çarpan parantezine alınarak toplanabilir ve çıkarılabilir. Bu durum, aşağıda önerme biçiminde gösterilmiştir.

n tam sayı; a, b, x gerçek sayı ve x sıfırdan farklı olmak üzere $a \cdot x^n + b \cdot x^n - c \cdot x^n = (a + b - c) \cdot x^n$ eşitliği vardır.

n tam sayı, a sıfırdan farklı gerçek sayı ve $1 \leq |a| < 10$ olmak üzere $a \cdot 10^n$ ifadesine **bilimsel gösterim** denir.

Gerçek Sayıların Üslü Gösterimleriyle Yapılan Çarpma ve Bölme İşlemleri

Ankara'da barajlardaki su miktarı; 2001 yılı Ocak ayında yaklaşık $4 \cdot 10^6$ metreküp, 2023 yılı Ocak ayında yaklaşık $1{,}6 \cdot 10^8$ metreküp olarak ölçülmüştür (Görsel 1.2).

1 metreküp suyun 1000 litreye eşit olduğu bilinmektedir. 2001 yılı Ocak ayında Ankara'da barajlardaki su miktarının kaç litre olduğunu ya da 2023 yılı Ocak ayındaki su miktarının 2001 yılı Ocak ayındaki su miktarının kaç katı olduğunu bulmak için hangi matematiksel işlemlere ihtiyaç duyulur?



Görsel 1.2: *Ankara Sarıyar Barajı*

3. Uygulama



Tabanları Aynı Olan Üslü Gösterimlerle Çarpma ve Bölme İşlemi

Verilen bilgileri inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.
x sıfırdan farklı bir gerçek sayı, a ve b birer tam sayı olsun.

1. Üslü gösterimlerle $x^a \cdot x^b$ ve $\frac{x^a}{x^b}$ işlemlerinin sonuçları nasıl hesaplanabilir? Varsayımlarınızı sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışarak oluşturunuz.

2. Tabloda verilen işlemlerin sonuçlarını örneklerdeki gibi bularak uygun yerlere yazınız.

İşlem	İşlemin Açık Hâli	Sonucun Üslü Gösterimi
$2^3 \cdot 2^4$	$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3\text{ tane}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4\text{ tane}}$	2^7
$(-6)^2 \cdot (-6)^3 \cdot (-6)$		
$\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5$		
$3^6 \cdot 3^{-4}$	$3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}}$	3^2
$5^{-4} \cdot 5^7$		
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$		
$\frac{2^5}{2^3}$	$\frac{2 \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}$	2^2
$\frac{11^6}{11^2}$		
$\frac{(-3)^7}{(-3)^4}$		
$\frac{6^3}{6^{-2}}$		
$\frac{x^a}{x^b}$		

3. Tabloda elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak tabanları aynı olan üslü gösterimlerle çarpma ve bölme işlemlerine dair genellemeler oluşturunuz.

4. Varsayımlarınızla genellemelerinizi karşılaştırarak üslü gösterimlerle çarpma ve bölme işlemlerine dair önermelerinizi oluşturunuz.

5. Oluşturduğunuz önermeler yardımıyla aşağıda verilen problemi çözünüz. Önermelerin problemin çözümünde ne tür kolaylıklar sağladığını ve başka hangi problem durumlarında kullanılabileceğini yazınız.

Yeryüzündeki kumsallarda yaklaşık $4 \cdot 10^{21}$ kum tanesi olduğu düşünülmektedir. Arşimet, yaptığı bir çalışmada bütün evreni doldurmak için gereken kum tanesi sayısını yaklaşık olarak hesaplamıştır. Arşimet'in bulduğu sayı, yeryüzündeki kumsallarda bulunan kum tanesi sayısının $2 \cdot 10^{42}$ katıdır.

Buna göre tüm evreni doldurmak için gereken kum tanesi sayısı nasıl hesaplanabilir?

6. a ve b nin pozitif tam sayı olduğu durumlar için oluşturduğunuz önermelerin doğrulama adımlarının bir kısmı aşağıda verilmiştir. Boşlukları uygun şekilde doldurup önermenizi matematiksel olarak doğrulayınız.

a ve b nin negatif tam sayı olduğu durumlar için oluşturduğunuz önermeleri matematiksel olarak doğrulayınız.

Doğrulama yöntemlerinizi sınıf arkadaşlarınızın kullandığı yöntemlerle karşılaştırarak kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

a) $$x^a \cdot x^b = \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{a tane}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{b tane}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{(\ldots\ldots)\text{ tane}} = x^{a+b}$$

b) a > b için $$\frac{x^a}{x^b} = \frac{\overbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}^{\ldots\text{ tane}}}{\underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\ldots\text{ tane}}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{(a-b)\text{ tane}} = \ldots^{a-b}$$

a < b için $$\frac{x^a}{x^b} = \frac{\overbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}^{\ldots\text{ tane}}}{\underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\ldots\text{ tane}}} = \frac{1}{\underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{(b-a)\text{ tane}}} = \frac{1}{\ldots^{b-a}} = \ldots^{a-b}$$

1. ÖRNEK

Evrendeki canlı ve cansız varlıkların atomlardan oluştuğu bilinmektedir. İnsan vücudundaki atom sayısı, insanın kütlesi (kg) ile 10^{26} sayısı çarpılarak yaklaşık olarak hesaplanabilir. $6,02 \cdot 10^{23}$ tane atom, 1 mol kabul edilmektedir.

Buna göre kütlesi 66,22 kg olan bir kişinin vücudunda yaklaşık kaç mol atom olduğunu bulunuz.

Çözüm

Kütlesi 66,22 kg olan kişinin vücudunda yaklaşık $66,22 \cdot 10^{26} = 6,622 \cdot 10^{27}$ tane atom bulunur. 1 mol $6,02 \cdot 10^{23}$ tane atomdan oluştuğundan $6,622 \cdot 10^{27}$ tane atom

$$\frac{6,622 \cdot 10^{27}}{6,02 \cdot 10^{23}} = \frac{6622 \cdot 10^{27}}{6020 \cdot 10^{23}} = \frac{6622 \cdot 10^{27}}{602 \cdot 10 \cdot 10^{23}} = \frac{6622 \cdot 10^{27}}{602 \cdot 10^{24}} = 11 \cdot 10^{27-24} = 11 \cdot 10^3$$
$$= 1,1 \cdot 10^4 \text{ mol olur.}$$

2. ÖRNEK

Üslü gösterimlerle çarpma ve bölme işlemlerine dair elde ettiğiniz önermelerden yararlanarak $\dfrac{0,5 \cdot 2^7}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

Çözüm

$0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$ ve $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = (-2)^3 = -2^3$ olur.

Buradan $\frac{2^{-1} \cdot 2^7}{-2^3} = -\frac{2^{-1+7}}{2^3} = -\frac{2^6}{2^3} = -2^{6-3} = -2^3$ bulunur.

1. Sıra Sizde



Newton'ın (Nivtın) evrensel kütle çekim teorisine göre yer çekimi sabiti G olmak üzere $G = 6,673 \cdot 10^{-11}\ m^3/(kg \cdot sn^2)$ olarak hesaplanmıştır. Gezegenlerin yer çekimi kuvveti (m/sn^2), yer çekimi sabiti yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

$g = G \cdot \frac{M}{R^2}$

g: yer çekimi kuvveti (m/sn^2)

M: gezegenin kütlesi (kg)

R: gezegenin yarıçap uzunluğu (m)

Gezegen	Kütle (kg)	Yarıçap Uzunluğu (m)	Yer Çekimi Kuvveti (m/s^2)
Dünya	$5,97 \cdot 10^{24}$	$6,371 \cdot 10^6$	
Mars		$3,389 \cdot 10^6$	3,711

Buna göre aşağıdaki soruları hesap makinesi kullanarak cevaplayınız (Cevaplarınızı onda birler basamağına yuvarlayarak yazınız.).

a) Mars'ın kütlesinin kaç kg olduğunu bularak Dünya'nın kütlesinin Mars'ın kütlesinin kaç katı olduğunu hesaplayınız.

b) Dünya'nın yer çekimi kuvvetinin kaç m/sn^2 olduğunu bularak Mars'ın yer çekimi kuvveti ile karşılaştırınız.

4. Uygulama



Üsleri Aynı Olan Üslü Gösterimlerle Çarpma ve Bölme İşlemleri

Verilen bilgileri inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a pozitif tam sayı, x, y birer gerçek sayı ve y sıfırdan farklı olsun.

1. Üslü gösterimlerle $x^a \cdot y^a$ ve $\frac{x^a}{y^a}$ işlemlerinin sonuçları nasıl hesaplanabilir? Varsayımlarınızı sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışarak oluşturunuz.

2. Tabloda verilen işlemlerin sonuçlarını örneklerdeki gibi bularak uygun yerlere yazınız.

İşlem	İşlemin Açık Hâli	Sonucun Üslü Gösterimi
$2^3 \cdot 5^3$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^3$	10^3
$3^4 \cdot 4^4$		
$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$		
$(-2)^5 \cdot (-7)^5$		
$\left(-\frac{1}{3}\right)^7 \cdot (6)^7$		
$x^a \cdot y^a$		
$\frac{6^4}{5^4}$	$\frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5}$	$\left(\frac{6}{5}\right)^4$
$\frac{2^7}{3^7}$		
$\frac{6^5}{2^5}$		
$\frac{10^3}{(-2)^3}$		
$\frac{x^a}{y^a}$		

3. Tabloda elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak üsleri aynı olan üslü gösterimlerle çarpma ve bölme işlemlerine dair genellemelerinizi sınıf arkadaşlarınızla tartışarak oluşturunuz.

4. Varsayımlarınızla genellemelerinizi karşılaştırarak üsleri aynı olan üslü gösterimlerle çarpma ve bölme işlemlerine dair önermelerinizi oluşturunuz.

5. Oluşturduğunuz önermeler yardımıyla aşağıda verilen problemi çözünüz. Önermelerin problemin çözümünde ne tür kolaylıklar sağladığını ve başka hangi problem durumlarında kullanılabileceğini yazınız.

$A = 3 \cdot 2^{11}$ ve $B = 7 \cdot 5^{11}$ sayıları veriliyor. $A \cdot B$ sayısının kaç basamaklı olduğunu bulunuz.

6. Oluşturduğunuz önermelerin doğrulama adımlarının bir kısmı aşağıda verilmiştir. Boşlukları uygun şekilde doldurarak önermenizi matematiksel olarak doğrulayınız ve doğrulama yöntemlerinizi kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

$$x^a \cdot y^a = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{a tane}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{\text{.... tane}} = \underbrace{(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot \ldots \cdot (x \cdot y)}_{\text{.... tane}} = (x \cdot y)^a$$

$$\frac{x^a}{y^a} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{\text{.... tane}}}{\underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{\text{.... tane}}} = \underbrace{\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{x}{y}\right)}_{\text{.... tane}} = \text{.........}$$

Üslü Gösterimleri Verilen Sayıların Üssünü Alma İşlemi

Günümüzde veri depolama birimi olarak kullanılan bayt (B), megabayt (MB) ve cigabayt (GB) arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur.

$1\ \text{GB} = 2^{10}\ \text{MB} = (2^{10})^3\ \text{B}$

1 cigabaytın kaç bayt olduğunu 2'nin kuvveti olarak yazabilmek için hangi matematiksel işlemlere ihtiyaç duyulur?

5. Uygulama

Üslü Gösterimin Üssünü Alma

Verilen bilgileri inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

x bir gerçek sayı, a ve b pozitif tam sayı olsun.

1. $(x^a)^b$ işleminin sonucu nasıl hesaplanabilir? Varsayımlarınızı sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışarak oluşturunuz.

2. Tabloda verilen işlemlerin sonuçlarını örnekteki gibi bularak uygun yerlere yazınız.

İşlem	İşlemin Açık Hâli	Sonucun Üslü Gösterimi
$(3^2)^3$	$3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^{2+2+2}$	3^6
$(5^4)^6$		
$(-2^5)^2$		
$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]^3$		
$(x^a)^b$		

3. Tabloda elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak üslü gösterimlerin üssünü alma işlemiyle ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

4. Varsayımlarınızla genellemelerinizi karşılaştırarak üslü gösterimlerin üssünü alma işlemine dair önermeler oluşturunuz.

5. Oluşturduğunuz önermeler yardımıyla aşağıda verilen problemi çözünüz. Önermelerin problemin çözümünde ne tür kolaylıklar sağladığını ve başka hangi problem durumlarında kullanılabileceğini yazınız.

Tanımlanan bir işleme göre çokgenlerin kenar sayısı, içine yazılan sayının kaçıncı kuvvetinin alınacağını göstermektedir.

Örneğin [3] (kare) $= 3^4$, [5] (üçgen) $= 5^3$ olmaktadır. Buna göre [7] (altıgen, kare içinde) işleminin sonucunu bulunuz.

6. Oluşturduğunuz önermelerin doğrulama adımlarının bir kısmı aşağıda verilmiştir. Boşlukları uygun şekilde doldurarak önermenizi matematiksel olarak doğrulayınız ve doğrulama yöntemlerinizi kullanışlılık açısından değerlendiriniz..

$$(x^a)^b = \underbrace{(x^a)\cdot(x^a)\cdot \ldots \cdot(x^a)}_{\text{.... tane}} = x^{\overbrace{a+a+\ldots+a}^{\text{.... tane}}} = \text{.........}$$

3. ÖRNEK

$\dfrac{(-2^4)^3 \cdot (-2^3)^2}{(2^4 \cdot 2^{-2})^{-3}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$(-2^4)^3 = -2^{12}$

$(-2^3)^2 = 2^6$

$(2^4 \cdot 2^{-2})^{-3} = (2^2)^{-3} = 2^{-6}$ olur. Bulunan ifadeler yerine yazıldığında

$\dfrac{(-2^4)^3 \cdot (-2^3)^2}{(2^4 \cdot 2^{-2})^{-3}} = \dfrac{-2^{12} \cdot 2^6}{2^{-6}} = -\dfrac{2^{18}}{2^{-6}} = -2^{18-(-6)} = -2^{18+6} = -2^{24}$ olur.

4. ÖRNEK

$A = 3 \cdot (2^3)^6 \cdot 5^{14}$ şeklindeki A sayısı veriliyor. A sayısının değeri bulunmadan kaç basamaklı olduğu nasıl bulunabilir? A nın basamak sayısını bulunuz ve yönteminizi açıklayınız.

Çözüm

10'un kuvveti cinsinden yazılarak A sayısının sondan kaç basamağının sıfır olduğu hesaplanabilir.

$A = 3 \cdot (2^3)^6 \cdot 5^{14} = 3 \cdot 2^{18} \cdot 5^{14} = 3 \cdot 2^4 \cdot 2^{14} \cdot 5^{14} = 3 \cdot 16 \cdot (2 \cdot 5)^{14} = 48 \cdot 10^{14}$ olur.

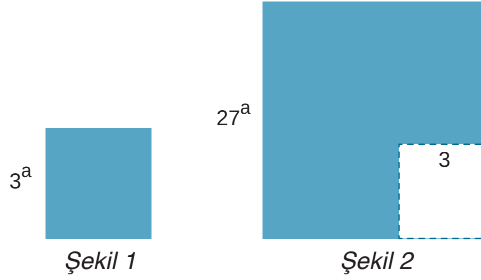
Buradan 48'in sağında 14 tane 0 olduğu anlaşılır. A sayısının $14 + 2 = 16$ basamaklı olduğu bulunur.

2. Sıra Sizde

1. $2^x = 3$ **olduğuna göre** 4^{2x+1} **ifadesinin eşitini bulunuz.**

2. $\left(\dfrac{18^6}{3^{12}} + \dfrac{7^{-6}}{14^{-6}}\right) \cdot 6^5 \cdot 3^{-5}$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

3.



Şekil 1 *Şekil 2*

a bir gerçek sayı olmak üzere Şekil 1'de bir kenarının uzunluğu 3^a birim olan kare verilmiştir. Şekil 2, bir kenarının uzunluğu 27^a birim olan karenin bir köşesinden bir kenarının uzunluğu 3 birim olan kare çıkartılarak elde edilmiştir.

Buna göre Şekil 1'deki karenin alanı x birimkare olmak üzere Şekil 2'nin alanını x cinsinden bulunuz.

5. ÖRNEK

Aşağıdaki tabloda Adana, Kahramanmaraş ve Tokat il merkezleri ile Çanakkale il merkezi arasındaki karayolu mesafeleri metre cinsinden ve yaklaşık olarak verilmiştir.

Adana-Çanakkale	$1,09 \cdot 10^6$ m
Kahramanmaraş-Çanakkale	$123 \cdot 10^4$ m
Tokat-Çanakkale	$10,54 \cdot 10^5$ m

Buna göre Adana, Kahramanmaraş ve Tokat il merkezleri ile Çanakkale il merkezi arasındaki karayolu mesafelerini küçükten büyüğe sıralayınız.

Çözüm

Adana, Kahramanmaraş ve Tokat il merkezleri ile Çanakkale il merkezi arasındaki karayolu mesafeleri sırasıyla A, B ve C olsun. A, B ve C değerlerinin büyüklüklerinin karşılaştırılması için üslü gösterimlerin eşitlenmesi gerekmektedir.

$A = 1,09 \cdot 10^6$ m

$B = 123 \cdot 10^4 \text{ m} = 1,23 \cdot 10^6$ m

$C = 10,54 \cdot 10^5 \text{ m} = 1,054 \cdot 10^6$ m olur.

Üslü gösterimler eşit olduğundan $1,054 < 1,09 < 1,23$ katsayılarının sıralaması A, B ve C değerleri arasındaki sıralamayı belirler.

Buradan $C < A < B$ bulunur.



Derecelendirme ölçeğine ulaşmak için karekodu okutunuz.

Araştırma Ödevi

Aşağıda verilen adımları gerçekleştirerek araştırma ödevini zamanında ve eksiksiz olarak tamamlayınız.

- 1 ışık yılının kaç km olduğunu ışık hızından yararlanarak hesaplayınız ve bilimsel gösterimle ifade ediniz.
- Güneş sisteminde bulunan üç gezegen belirleyip bu gezegenlerin birbirlerine olan uzaklıklarının kaç km olduğunu araştırarak bilimsel gösterimle ifade ediniz.
- Hidrojen atom çekirdeğinin çapının kaç m olduğunu araştırarak bilimsel gösterimle ifade ediniz.
- Atmosferdeki karbondioksit miktarının kaç ppm (10 mg/1 l) olduğunu araştırarak bilimsel gösterimle ifade ediniz.
- Bulduğunuz değerleri rapor hâline getirerek sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

Ödeviniz, derecelendirme ölçeği ile değerlendirilecektir.

Kontrol Noktası 

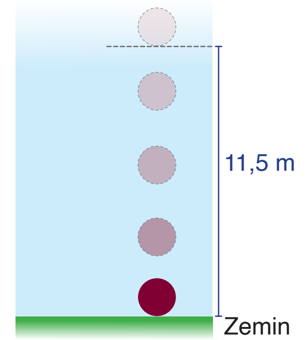
a, b, c birer gerçek sayı; x, y sıfırdan farklı gerçek sayı; m, n birer tam sayı olsun. Üslü gösterimler ile aşağıdaki işlemler yapılabilir.

- $a \cdot x^m + b \cdot x^m - c \cdot x^m = (a + b - c) \cdot x^m$
- $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
- $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
- $x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m$
- $\dfrac{x^m}{y^m} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^m$
- $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

Gerçek Sayıların Köklü Gösterimi

x metre yükseklikten bırakılan cismin yere düşme süresi, t saniye ve yer çekimi ivmesi g (m/sn^2) olmak üzere $t = \sqrt{\dfrac{2x}{g}}$ eşitliği ile hesaplanır.

11,5 metre yükseklikten bırakılan cismin yere düşme süresi (sn.) t olsun (Görsel 1.3). Dünya'da yer çekimi ivmesi (g) yaklaşık 9,8 m/sn^2 olmak üzere cismin yere düşme süresi $t = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 11,5}{9,8}}$ olur.



***Görsel 1.3:** Belirli bir yükseklikten bırakılan cisim*

6. Uygulama



Üslü ve Köklü Gösterimlerin Birbiri Cinsinden İfade Edilmesi

Verilen bilgileri inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

Kuvveti rasyonel sayı olan üslü gösterimler, köklü gösterim olarak ifade edilebilir. Benzer şekilde köklü gösterimler de üslü gösterim olarak ifade edilebilir.

1. Tablo 1'de verilen üslü gösterimleri örnekteki gibi köklü gösterim olarak yazınız.

Tablo 1

Üslü Gösterim	Köklü Gösterim
$2^{\frac{3}{2}}$	$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt{8}$
$2^{\frac{5}{2}}$	
$3^{\frac{1}{2}}$	$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{3^1} = \sqrt{3}$
$6^{\frac{1}{2}}$	
$5^{\frac{2}{3}}$	$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$
$7^{\frac{2}{5}}$	
$(-2)^{\frac{3}{5}}$	$(-2)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-2)^3} = \sqrt[5]{-8}$
$(-2)^{\frac{5}{3}}$	

2. Tablo 2'de verilen köklü gösterimleri üslü gösterim olarak yazıp tabloyu uygun şekilde doldurunuz.

Tablo 2

Köklü Gösterim	Üslü Gösterim
$\sqrt{6}$	$\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt[3]{7}$	
$\sqrt[5]{16}$	
$\sqrt[7]{5^3}$	

m, n pozitif tam sayı; $n \geq 2$ ve x bir pozitif gerçek sayı olmak üzere $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ şeklinde ifade edilebilir.
$\sqrt[n]{x^m}$ ifadesine **köklü gösterim** denir. Bu gösterimde n değerine **kökün derecesi** denir.
$\sqrt[n]{x^m}$ ifadesi, "n. dereceden kök x üzeri m" şeklinde okunur.

Özel olarak $n = 2$ olduğunda $\sqrt{x^m}$ şeklinde yazılır. Bu ifade, "karekök x üzeri m" şeklinde okunur.
k pozitif tam sayı, a bir gerçek sayı olmak üzere $\sqrt[2k+1]{a}$ ifadesi, tüm a değerleri için gerçek sayıdır.
$\sqrt[2k]{a}$ ifadesi, $a \geq 0$ için gerçek sayıdır.

a gerçek sayı, n pozitif tam sayı ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{n tek ise} \\ |a|, & \text{n çift ise} \end{cases}$$ olur.

Gerçek Sayıların Köklü Gösterimleriyle Yapılan Toplama, Çıkarma, Çarpma ve Bölme İşlemleri

Yapılan bir deneyde a metre yükseklikten bırakılan bir cismin yere düşme süresi $\sqrt{48}$ sn. olarak hesaplanmıştır. Ardından b metre yükseklikten farklı bir cisim bırakılmış ve cismin yere düşme süresi $\sqrt{108}$ sn. olarak hesaplanmıştır. İki cismin yere düşme süreleri arasındaki farkı bulmak için hangi matematiksel işlemlere ihtiyaç duyulur?

7. Uygulama



Köklü Gösterimlerle Toplama, Çıkarma, Çarpma, Bölme ve Kökün Kökünü Alma İşlemleri

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Üslü gösterimlerle yapılan toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve üssün üssünü alma işlemlerinden yararlanarak bu işlemlerin köklü gösterimlerle nasıl yapılabileceğine dair varsayımlarınızı sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışarak oluşturunuz.

2. Tablo 1'de üslü gösterimle toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve üssün üssünü alma işlemlerine yer verilmiştir. İşlemlerin sonuçlarını önce üslü gösterim kullanarak bulunuz. Köklü gösterimle işlemin nasıl yapılabileceğini bularak Tablo 1'de uygun yerlere yazınız.

Tablo 1

İşlemin Üslü Gösterimi	Üslü Sonuç	İşlemin Köklü Gösterimi	Köklü Sonuç
$4 \cdot 5^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot 5^{\frac{1}{3}}$	$(4+2) \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 6 \cdot 5^{\frac{1}{3}}$	$4\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5}$	$(4+2)\sqrt[3]{5} = 6\sqrt[3]{5}$
$4 \cdot 6^{\frac{1}{5}} - 2 \cdot 6^{\frac{1}{5}}$			
$3^{\frac{2}{3}} + 8 \cdot 3^{\frac{2}{3}} - 2 \cdot 3^{\frac{2}{3}}$			
$2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$			



$\dfrac{10^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}}$			
$\left(6^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{5}}$			

3. Tablo 1'de elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak köklü gösterimlerle toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerine dair genellemelerinizi oluşturunuz.

4. m, n pozitif tam sayı, $n \geq 2$, x, y pozitif gerçek sayı ve a, b, c gerçek sayı olmak üzere Tablo 2'de köklü gösterimlerle işlemler verilmiştir. Varsayımlarınızla genellemelerinizi karşılaştırarak önermelerinizi Tablo 2'ye örnekteki gibi yazınız.

Tablo 2

İşlem	Önerme
$a\sqrt[n]{x^m} + b\sqrt[n]{x^m}$	$a\sqrt[n]{x^m} + b\sqrt[n]{x^m} = (a+b)\sqrt[n]{x^m}$ olur.
$a\sqrt[n]{x^m} - b\sqrt[n]{x^m}$	
$a\sqrt[n]{x^m} + b\sqrt[n]{x^m} - c\sqrt[n]{x^m}$	
$\sqrt[n]{x^m} \cdot \sqrt[n]{y^m}$	
$\dfrac{\sqrt[n]{x^m}}{\sqrt[n]{y^m}}$	
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}$	

5. Oluşturduğunuz önermeler yardımıyla aşağıda verilen problemi çözünüz. Önermelerin problemin çözümünde ne tür kolaylıklar sağladığını ve başka hangi problem durumlarında kullanılabileceğini yazınız.



Yandaki şekilde Bahar Hanım'ın yaptırmakta olduğu evin bir bölümüne ait plan verilmiştir. Planda yer verilen mutfak, kiler ve salon kare şeklindedir. Mutfak ve kilerin taban alanları sırasıyla 20 m^2 ve 5 m^2 dir. Bahar Hanım; mutfak, kiler ve salon zeminlerini metrekaresi 975 Türk lirası olan ahşap parke ile kaplatmak istemektedir.

Bahar Hanım'ın alması gereken ahşap parkenin fiyatını bulunuz.

6. Oluşturduğunuz önermeleri matematiksel olarak doğrulayınız. Doğrulama yöntemlerinizi sınıf arkadaşlarınızın kullandığı yöntemlerle karşılaştırarak kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

6. ÖRNEK

$\sqrt{25}+\sqrt[4]{16}-\sqrt{0}+2\sqrt[3]{-27}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=|5|^{\frac{2}{2}}=5$, $\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=|2|^{\frac{4}{4}}=2$, $\sqrt{0}=0$

$\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=(-3)^{\frac{3}{3}}=-3$ ifadeleri işlemde yerine yazıldığında

$\sqrt{25}+\sqrt[4]{16}-\sqrt{0}+2\sqrt[3]{-27}=5+2-0+2\cdot(-3)=7-6=1$ bulunur.

3. Sıra Sizde

$\sqrt{75}-2\sqrt{12}+5\sqrt{27}$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

7. ÖRNEK

$\dfrac{\sqrt[5]{24}\cdot\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{3}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm

Köklü gösterimlerin dereceleri eşit olduğundan çarpma ve bölme işlemleri aynı kök içinde yapılabilir.

$\dfrac{\sqrt[5]{24}\cdot\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{3}}=\sqrt[5]{\dfrac{24\cdot 4}{3}}=\sqrt[5]{8\cdot 4}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$ bulunur.

8. ÖRNEK

$\dfrac{\sqrt[3]{50+\sqrt{16}}}{\sqrt[3]{5-\sqrt[4]{81}}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$\sqrt[3]{50+\sqrt{16}}=\sqrt[3]{50+\sqrt{4^2}}=\sqrt[3]{50+|4|}=\sqrt[3]{50+4}=\sqrt[3]{54}$

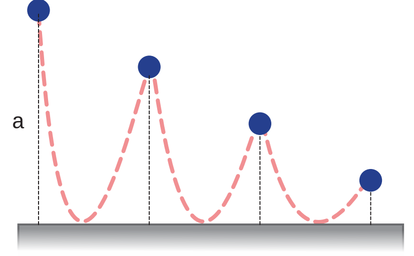
$\sqrt[3]{5-\sqrt[4]{81}}=\sqrt[3]{5-\sqrt[4]{3^4}}=\sqrt[3]{5-|3|}=\sqrt[3]{5-3}=\sqrt[3]{2}$ ifadeleri işlemde yerine yazıldığında

$\dfrac{\sqrt[3]{50+\sqrt{16}}}{\sqrt[3]{5-\sqrt[4]{81}}}=\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{54}{2}}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$ bulunur.

4. Sıra Sizde

Ay yüzeyinde yapılan bir deneyde belirli bir yükseklikten bırakılan cismin yere her çarptığında düştüğü ve yüksekliğin karekökü kadar yükseldiği görülmüştür.

Bu deneye göre verilen tabloyu doldurarak a metre yükseklikten bırakılan cismin yere 3. çarpmasından sonra kaç metre yükseleceğini gösteren bir kural oluşturunuz.



Yere Çarpma Sayısı	Cismin Yüksekliği (m)
1. çarpmadan sonra	
2. çarpmadan sonra	
3. çarpmadan sonra	

9. ÖRNEK

$\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{12}}}{\sqrt[6]{3}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$\sqrt[3]{\sqrt{12}} = \sqrt[3 \cdot 2]{12} = \sqrt[6]{12}$ ifadesi işlemde yerine yazıldığında

$\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{12}}}{\sqrt[6]{3}} = \dfrac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt[6]{3}} = \sqrt[6]{\dfrac{12}{3}} = \sqrt[6]{4}$ bulunur.

5. Sıra Sizde

Aşağıda verilen işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) $\dfrac{\sqrt{0,04} + \sqrt{0,36}}{\sqrt{0,09} - \sqrt{1,21}}$

b) $\dfrac{5\sqrt[3]{48} - \sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2}}$

8. Uygulama



Kök Dereceleri Farklı Olan Köklü Gösterimlerle Çarpma ve Bölme İşlemleri Yapma

Verilen bilgileri inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a, b pozitif gerçek sayı; m, n pozitif tam sayı ve $m \geq 2$, $n \geq 2$, $m \neq n$ olsun.

1. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ ve $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ işlemleri nasıl yapılabilir? Varsayımlarınızı sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışarak oluşturunuz.

2. Tabloda köklü gösterimlerin derecelerinin genişletilmesi ve sadeleştirilmesi işlemleri üslü gösterimler yardımıyla bulunmuştur. Verilmeyen işlemlerin sonuçlarını örneklerdeki gibi bularak uygun yerlere yazınız.

Üslü Gösterim	Üsse Yapılan İşlem	Köklü Gösterim	Elde Edilen Eşitlik
$3^{\frac{1}{2}}$	3 ile genişletme: $3^{\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3}} = 3^{\frac{3}{6}}$	$\sqrt[6]{3^3}$	$\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3}$
$2^{\frac{1}{3}}$	2 ile genişletme:		
$6^{\frac{2}{5}}$	5 ile genişletme:		
$5^{\frac{6}{4}}$	2 ile sadeleştirme: $5^{\frac{6 : 2}{4 : 2}} = 5^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{5^3}$	$\sqrt[4]{5^6} = \sqrt{5^3}$
$7^{\frac{9}{15}}$	3 ile sadeleştirme:		
$3^{\frac{12}{16}}$	4 ile sadeleştirme:		

3. Tabloda elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak köklü gösterimlerin derecelerinin genişletilmesi ve sadeleştirilmesiyle ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

4. Varsayımlarınızla genellemelerinizi karşılaştırarak kök dereceleri farklı olan köklü gösterimlerle çarpma ve bölme işlemine dair önermelerinizi oluşturunuz.

5. Oluşturduğunuz önermeler yardımıyla aşağıda verilen problemi çözünüz. Önermelerin problemin çözümünde ne tür kolaylıklar sağladığını ve başka hangi problem durumlarında kullanılabileceğini belirleyerek sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

a, n pozitif tam sayı ve $n \geq 2$ olmak üzere

[n]◇a işlemi, a sayısının n. dereceden kökünü ifade etmektedir.

Şekilleri bağlayan okların anlamları aşağıda verilmiştir.

⟵⟶ : Sağındaki sayı ile solundaki sayı çarpılır.

⟵- - -⟶ : Solundaki sayı, sağındaki sayıya bölünür.



Örneğin

4 ◇2 ⟷ 2 ◇3 $= \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{3}$ şeklinde ifade edilir.

Buna göre aşağıda verilen işlemin sonucunu bulunuz.

2 ◇4 ⟷ 3 ◇3 ⇠⇢ 6 ◇24

6. Oluşturduğunuz önermeleri matematiksel olarak doğrulayınız ve doğrulama yöntemlerinizi kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

10. ÖRNEK

$\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{5}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm

Köklü gösterimlerle çarpma ve bölme işlemlerinin yapılabilmesi için köklerin dereceleri eşit olmalıdır. Bu sebeple köklerin dereceleri eşitlenerek çarpma işlemi yapılır.

$$\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{5} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{2}{6}}$$

$$= \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{2 \cdot 5^2}$$

$$= \sqrt[6]{50}$$ bulunur.

11. ÖRNEK

$a = \sqrt[6]{3}, b = \sqrt[3]{2}$ ve $c = \sqrt[9]{7}$ veriliyor. Buna göre a, b ve c sayılarını küçükten büyüğe sıralayınız.

Çözüm

Köklerin dereceleri eşit olduğunda kök içinde olan sayılar arasındaki sıralama; a, b ve c arasındaki sıralamayı verir.

a, b ve c sayılarının köklerinin dereceleri 18'de eşitlenebilir.

$$a = \sqrt[6]{3} = \sqrt[6 \cdot 3]{3^{1 \cdot 3}} = \sqrt[18]{27}$$

$$b = \sqrt[3]{2} = \sqrt[3 \cdot 6]{2^{1 \cdot 6}} = \sqrt[18]{64}$$

$$c = \sqrt[9]{7} = \sqrt[9 \cdot 2]{7^{1 \cdot 2}} = \sqrt[18]{49}$$

Buradan $a < c < b$ olur.

6. Sıra Sizde

1. $\dfrac{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{2}}{\sqrt[10]{6}}$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

2. $x = -\sqrt[4]{4}$, $y = -\sqrt[3]{3}$ ve $z = -\sqrt[6]{8}$ veriliyor.

Buna göre x, y ve z sayılarını küçükten büyüğe sıralayınız.



9. Uygulama

Köklü Gösterimlerin Eşleniğini Bulma

Verilenlere göre soruları cevaplayınız.

a ve b pozitif gerçek sayı olsun.

1. Paydası köklü gösterim olan ifadelerde toplama veya çıkarma işlemleri nasıl yapılabilir? $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ ve $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ ifadelerinin paydası gerçek sayıya nasıl dönüştürülebilir? Varsayımınızı oluşturunuz.

2. a, b birbirinden farklı birer pozitif gerçek sayı olmak üzere tablodaki çarpma işlemlerini yaparak ulaştığınız sonuçları tabloda uygun yerlere örneklerdeki gibi yazınız.

İşlem	Sonuç
$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$	$\sqrt{3 \cdot 3} = \sqrt{3^2} = 3$
$\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}$	
$2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$	
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$	
$\dfrac{1}{\sqrt{7}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$	



$\frac{3}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$	
$\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$	
$(\sqrt{5}-\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{2})$	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{5^2} + \sqrt{10} - \sqrt{10} - \sqrt{2^2}$ $= 5 - 2$ $= 3$
$(\sqrt{7}-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{3})$	
$(2\sqrt{2}+1) \cdot (2\sqrt{2}-1)$	
$(3\sqrt{5}-2\sqrt{3}) \cdot (3\sqrt{5}+2\sqrt{3})$	
$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$	
$\frac{2}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$	
$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$	

3. Tabloda elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak paydası köklü gösterimlerden oluşan sayıların paydasını rasyonel yapma işlemiyle ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

4. Varsayımlarınızla genellemelerinizi karşılaştırarak paydası köklü gösterimlerden oluşan sayıların paydasını rasyonel yapma işlemine dair önermelerinizi oluşturunuz.

5. Oluşturduğunuz önermeler yardımıyla aşağıda verilen problemi çözünüz. Önermelerin problemin çözümünde ne tür kolaylıklar sağladığını ve başka hangi problem durumlarında kullanılabileceğini sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

g yer çekimi ivmesi (m/sn^2) olmak üzere h yüksekliğinden (m) aşağı bırakılan cismin yere düşme süresi (sn.) t olsun. Cismin yere düşme süresini bulmak için $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ eşitliği kullanılır.

Bir cisim 0,5 m yükseklikten bırakılmıştır. Cisim yere çarptığı an ikinci bir cisim, 2 m yükseklikten bırakılmıştır. İlk cismin bırakıldığı andan ikinci cismin yere düştüğü ana kadar kaç saniye geçmiştir?
(g yer çekimi ivmesini 9,8 m/sn^2 alınız.)

6. Oluşturduğunuz önermeleri matematiksel olarak doğrulayınız. Doğrulama yöntemlerinizi sınıf arkadaşlarınızın kullandığı yöntemlerle karşılaştırarak kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

12. ÖRNEK

$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$$\underset{(\sqrt{2})}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \underset{(\sqrt{3})}{\frac{1}{2\sqrt{3}}} = \underset{(3)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$$ olur.

13. ÖRNEK

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm

$$\underset{(\sqrt{3}+1)}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}} - \underset{(\sqrt{3}-1)}{\frac{1}{\sqrt{3}+1}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3-1} - \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} = \frac{3+\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{3+\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$ bulunur.

7. Sıra Sizde

$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

14. ÖRNEK

Ahmet Bey, 1200 m^2 lik kare şeklindeki arazisinin çevresini çitle çevirmek istemektedir. Ahmet Bey'in kullanacağı çit 5 metrelik paneller hâlinde satılmakta olup panelin tanesi 1700 Türk lirasıdır.

Buna göre Ahmet Bey'in bu işi en az maliyetle yaklaşık kaç Türk lirası harcayarak tamamlayabileceğini bulunuz.

Çözüm

Kare şeklindeki 1200 m^2 lik arazinin bir kenarının uzunluğu $\sqrt{1200}$ m'dir. Ahmet Bey'in kaç metre çite ihtiyacı olduğunu bulmak için bir kenar uzunluğunun yaklaşık değeri hesaplanmalıdır.

$\sqrt{1200} = \sqrt{20^2 \cdot 3} = 20\sqrt{3}$ olur.

$1^2 < (\sqrt{3})^2 < 2^2$ olduğundan $\sqrt{3}$ sayısı, 1 ve 2 sayıları arasındadır.

$1 < 3 < 4$ olduğundan 3 sayısı 4'e daha yakındır. Buradan $\sqrt{3}$ sayısı 2'ye daha yakın olduğundan 1,5 ile 2 arasındadır.

$(1{,}5)^2 < (\sqrt{3})^2 < 2^2$ ise $2{,}25 < 3 < 4$ eşitsizliğinde 3 sayısı 2,25 sayısına daha yakın olduğundan $\sqrt{3}$ sayısı 1,5 ile $\dfrac{1{,}5 + 2}{2} = \dfrac{3{,}5}{2} = 1{,}75$ arasındadır.

$(1{,}5)^2 < (\sqrt{3})^2 < (1{,}75)^2$ ise $2{,}25 < 3 < 3{,}0625$ eşitsizliğinde 3 sayısı 3, 0625'e daha yakın olduğundan $\sqrt{3}$ sayısının yaklaşık değeri 1,75'tir.

Buradan $\sqrt{3} \approx 1{,}75$ olur.

Arazinin bir kenarının uzunluğu, $20\sqrt{3} \approx 20 \cdot 1{,}75 = 35\,\text{m}$ bulunur. Buradan arazinin çevre uzunluğu yaklaşık olarak $4 \cdot 35 = 140\,\text{m}$ bulunur.

Ahmet Bey'in $140 \div 5 = 28$ adet panel alması gerekmektedir.

Ahmet Bey, bu işi yaklaşık olarak en az $28 \cdot 1700 = 47\,600$ Türk lirası harcayarak tamamlayabilir.

Kontrol Noktası



m, n, k pozitif tam sayı; m ≥ 2, n ≥ 2; x, y pozitif gerçek sayı ve a, b, c gerçek sayı olmak üzere

- $a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[n]{x} - c\sqrt[n]{x} = (a + b - c)\sqrt[n]{x}$
- $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$
- $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \cdot k]{x^{m \cdot k}} = \sqrt[\frac{n}{k}]{x^{\frac{m}{k}}}$ (m ve n, k nin tam katıdır.)
- $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$
- $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = x - y$ eşitlikleri vardır.



Alıştırmalar

1 ve 2. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplayınız.

Aşağıdaki tabloda bazı şehirlerin yaklaşık yüz ölçümleri ve 2023 yılındaki nüfusları yaklaşık olarak verilmiştir.

Şehir	Yaklaşık Yüz Ölçümü (km^2)	Yaklaşık Nüfus
Tokyo	$2,2 \cdot 10^2$	$3,74 \cdot 10^7$
Delhi	$1,5 \cdot 10^2$	$3,14 \cdot 10^7$
Pekin	$1,6 \cdot 10^3$	$2,15 \cdot 10^7$

1. Pekin'in yüz ölçümünün Tokyo'nun yüz ölçümünden kaç m^2 fazla olduğunu bulunuz.

2. Bir bölgenin nüfus yoğunluğu kilometrekareye düşen insan sayısı ile belirlenir.

Buna göre

a) Tabloda verilen şehirlerin nüfus yoğunluklarını nasıl belirleyebileceğinize dair önermenizi oluşturunuz.

b) Oluşturduğunuz önerme yardımıyla Tokyo, Delhi ve Pekin'in nüfus yoğunluklarını hesaplayınız.

c) Tokyo, Delhi ve Pekin'in nüfus yoğunlukları sırasıyla a, b ve c olmak üzere a, b ve c değerlerini <u>küçükten büyüğe</u> sıralayınız.

3. $\dfrac{2^{2a} + 2^{2a-1}}{4^{a+1} - 2^{2a+3}}$ **ifadesinin eşitini bulunuz.**

4. $\left(16^{\frac{1}{4}} + 625^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

5. $\dfrac{\sqrt{96} - 3\sqrt{54} + 5\sqrt{24}}{\sqrt{8} + 3\sqrt{50}}$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

6. $\sqrt{20 + \sqrt{7} + \dfrac{18}{5 + \sqrt{7}}}$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe ulaşmak için karekodu okutunuz.



1.2. GERÇEK SAYI ARALIKLARININ GÖSTERİMİNDE VE ARALIKLARLA İLGİLİ İŞLEMLERDE KÜME SEMBOL VE İŞLEMLERİ

Konuya Başlarken 



İŞ İLANI

Çalışma arkadaşları arıyoruz!

25-35 yaş arasında

En az lise mezunu

Sektörde en az 3 yıl deneyimli

İşe alım sınavından en az 70 puan alan

Çalışma saatleri: Hafta içi 08.30-17.30

Ayda 25 000 TL-30 000 TL arası kazanç imkânı

Yanda verilen iş ilanını inceleyiniz.

İşe alınacak kişilerde aranan şartlardan bazılarının belirttiği sayı değerleri matematiksel olarak nasıl ifade edilebilir?

Görüşlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

Sayı Kümeleri

Sayı doğrusu üzerinde iki farklı nokta arasında yer alan gerçek sayılar bir aralık belirtir. Gerçek sayılar, sayı doğrusu üzerinde veya aralık gösteriminden farklı olarak başka biçimlerde ifade edilebilir mi? 1 ile 6 arasındaki doğal sayılar, $\frac{1}{2}$ ile $\frac{16}{3}$ arasındaki rasyonel sayılar aralık şeklinde gösterilebilir mi? Aralık şeklinde ifade edilen veya edilemeyen sayı topluluklarına örnekler veriniz.

10. Uygulama 

Sayı Kümeleri

Verilenleri inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

Bazı firmalara ait otobüslerin otogardan kalkış peronları ile ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

- A firmasına ait otobüsler; karesi 100'den küçük, pozitif tam sayı olan numaralı peronlardan kalkış yapmaktadır.
- B firmasına ait otobüsler, numarası tek rakam olan peronlardan kalkış yapmaktadır.
- C firmasına ait otobüsler; numarası 25'ten küçük, çift, pozitif doğal sayı olan peronlardan kalkış yapmaktadır.
- D firmasına ait otobüsler, numarası iki basamaklı doğal sayı olan peronlardan kalkış yapmaktadır.

Peron numaralarının 1 ve 100 dâhil olmak üzere 1 ile 100 arasındaki tam sayılardan oluştuğu bilinmektedir.

1. Örneğin A firmasına ait otobüsler, 2 numaralı perondan kalkış yapmaktadır. Bu ifade, semboller yardımıyla "$2 \in A$" biçiminde de gösterilebilir. A firmasına ait otobüsler, 11 numaralı perondan kalkış yapmamaktadır. Bu ifade, semboller yardımıyla "$11 \notin A$" biçiminde de gösterilebilir. B, C ve D firmalarına ait otobüslerin kalktıkları peron numaralarından yararlanarak bu gösterimlere benzer örneklerin nasıl yazılacağına dair düşüncelerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız. Sonuçlarınızı karşılaştırınız.



2. A firmasına ait otobüsler 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9. peronlardan kalkış yapmaktadır. Bu sayılar, semboller kullanılarak

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{x \mid x^2 < 100, x \in Z^+\}$ olarak iki farklı gösterimle yazılabilir. B, C ve D firmalarına ait otobüslerin kalktıkları peron numaralarını belirleyerek iki farklı gösterimle yazınız.

B =

B =

C =

C =

D =

D =

3. A firmasına ait bilgideki pozitif tam sayı, pozitif rasyonel sayı olarak ifade edilseydi yine iki farklı gösterimle yazılabilir miydi? Gerekçelerinizle açıklayınız.

4. A firmasına ait otobüslerin kalkış yapacağı toplam 9 peron vardır. Bu ifade matematiksel olarak s(A) = 9 olarak yazılır ve A nın 9 tane sayıdan oluştuğunu ifade eder. B, C ve D firmalarına ait otobüslerin kalktıkları peron numaralarının kaçar tane olduklarını bularak A firmasına benzer biçimde yazınız.

5. A firmasına ait otobüslerin kalkış yapıp C firmasına ait otobüslerin kalkış yapmadığı peron numaraları, matematiksel olarak $A \setminus C$ şeklinde ifade edilir. Bu ifadeye karşılık gelen peron numaralarını belirleyiniz; 1. sorudakine benzer biçimde iki farklı gösterimle yazınız.

$A \setminus C =$

$A \setminus C =$

6. A veya B firmalarına ait otobüslerin kalkış yaptığı peron numaraları, matematiksel olarak $A \cup B$ şeklinde ifade edilir. Bu ifadeye karşılık gelen peron numaralarını belirleyiniz, 1. sorudakine benzer biçimde iki farklı gösterimle yazınız.

$A \cup B =$

$A \cup B =$

7. Hem C hem de D firmalarına ait otobüslerin kalkış yaptığı peron numaraları matematiksel olarak $C \cap D$ şeklinde ifade edilir. Bu ifadeye karşılık gelen peron numaralarını belirleyiniz, 1. sorudakine benzer biçimde iki farklı gösterimle yazınız.

$C \cap D =$

$C \cap D =$

8. A firmasına ait otobüslerin kalkış yapmadığı peron numaraları matematiksel olarak A' şeklinde ifade edilir. Bu ifadeye karşılık gelen peron numaralarını belirleyerek iki farklı gösterimle yazınız.

$A' =$

$A' =$

9. B firmasına ait otobüslerin kalkış yaptığı peronların tümünden A firmasına ait otobüsler de kalkış yapmakta mıdır?

Kontrol Noktası 

- Doğal sayılar, tam sayılar, çift tam sayılar, 3'ün katı olan doğal sayılar, rasyonel sayılar gibi sayı kümeleri **ortak özellik** veya **listeleme yöntemi** ile gösterilebilir.
- Sayı kümelerini oluşturan her bir sayıya o kümenin **elemanı** denir.
- Kümeler A, B, C gibi büyük harflerle ifade edilir. Listeleme yönteminde kümenin elemanları küme parantezi içinde ve aralarına virgül konarak verilir. A kümesinin elemanları $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ biçiminde gösterilir.
- Ortak özellik yönteminde kümenin elemanlarının taşıdığı şartlar veya ortak özellikler belirtilerek küme gösterilir. A kümesinin elemanları, $A = \{x \mid x$ in sahip olduğu tanımlayıcı özellikler$\}$ biçiminde gösterilir. Burada kullanılan "|" sembolü, "**öyle ki**" anlamına gelmektedir. "**A kümesi, x elemanlarından oluşmaktadır öyle ki x in sahip olduğu tanımlayıcı özellikler**" biçiminde okunur.
- Küme kavramına ilişkin semboller, işlemler ve anlamları tablodaki gibidir.

Sembol	Anlamı	Sembol	Anlamı
$\cup$	birleşim	$\in$	elemanıdır
$\cap$	kesişim	$\notin$	elemanı değildir
$\setminus$	fark	$\subseteq$	alt küme
A'	A kümesinin tümleyeni	$s(A)$	A kümesinin eleman sayısı
$\varnothing$	boş küme	$A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$	A kümesi

- Gerçek sayılar kümesi $(\mathbb{R})$; doğal sayılar $(\mathbb{N})$, tam sayılar $(\mathbb{Z})$, rasyonel sayılar $(\mathbb{Q})$ ve irrasyonel sayılar $(\mathbb{Q}')$ kümelerini kapsayan en geniş kümedir. Verilen sayı kümeleri için gerçek sayılar kümesi, evrensel küme olarak ifade edilebilir.

11. Uygulama



Sayı Kümelerinin Gösterimi

Tablodaki bilgileri inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Aşağıdaki tabloda bazı sayı kümeleri ortak özellik ve listeleme yöntemi ile gösterilmiştir. Tabloda boş bırakılan yerleri uygun şekilde doldurunuz.

Sayı Kümeleri	Listeleme Yöntemi	Ortak Özellik Yöntemi
Doğal Sayılar Kümesi		$\mathbb{N} = \{x \mid x \geq 0, x \in \mathbb{Z}\}$
Tam Sayılar Kümesi	$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	
3'ün Katı Olan Doğal Sayılar Kümesi		$K = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbb{N}\}$
Tek Rakamlar Kümesi		$T = \{x \mid x = 2k + 1, 0 \leq k \leq 4, k \in \mathbb{Z}\}$
Asal Rakamlar Kümesi	$A = \{2, 3, 5, 7\}$	
Çift Tam Sayılar Kümesi		$Ç = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$

2. 3'ün tabloda verilen sayı kümelerinden hangisi ya da hangilerinde bulunduğunu belirleyiniz. Cevabınızı matematiksel sembol kullanarak nasıl gösterebileceğinizi açıklayınız.

3. T ve A kümelerinde kaç tane eleman olduğunu bulunuz. T ve A kümelerinin eleman sayılarını matematiksel sembol kullanarak nasıl gösterebileceğinizi açıklayınız.

4. Doğal sayılar kümesindeki tüm elemanların aynı zamanda tablodaki başka hangi sayı kümesinin ya da kümelerinin elemanı olduğunu belirleyiniz. Cevabınızı matematiksel sembol kullanarak nasıl ifade edebileceğinizi açıklayınız.

5. Her iki kümede de bulunan elemanları bir kez yazmak koşuluyla T ve A kümelerinin tüm elemanlarından oluşan kümeyi listeleme yöntemiyle yazınız. Elde ettiğiniz kümeyi sembol kullanarak nasıl ifade edebileceğinizi açıklayınız.

6. Hem A hem de T kümesinde bulunan elemanların oluşturduğu kümeyi ortak özellik veya listeleme yöntemiyle yazarak sonuçlarınızı sınıf arkadaşlarınızın sonuçları ile karşılaştırınız. Elde ettiğiniz kümeyi sembol kullanarak nasıl ifade edebileceğinizi açıklayınız. Sınıfça fikirlerinizi paylaşınız.

7. Tam sayılar kümesinde olup doğal sayılar kümesinde olmayan sayıları belirleyerek bu sayıların oluşturduğu kümeyi ortak özellik veya listeleme yöntemiyle yazınız. Sonuçlarınızı sınıf arkadaşlarınızın sonuçları ile karşılaştırınız. Elde ettiğiniz sayı kümesini sembol kullanarak nasıl ifade edebileceğinizi açıklayınız.

8. Sıra Sizde

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Tabloda verilen sayı kümelerini listeleme veya ortak özellik yöntemi ile ifade ederek tabloyu doldurunuz.

Kümenin Adı	Kümenin Sözel İfadesi	Listeleme Yöntemi	Ortak Özellik Yöntemi
T	tek tam sayılar kümesi		
D	$\frac{5}{2}$ ile $10\sqrt{2}$ arasında olan doğal sayılar kümesi		
Ç	$-3 \cdot 10^{-2}$ ile 4^2 arasındaki çift tam sayılar kümesi		
G	$\frac{1}{2}$ ile 9 arasındaki gerçek sayılar kümesi		
B	−5'ten büyük rasyonel sayılar kümesi		

2. Tablodaki kümelerden yararlanarak aşağıdaki ifadeleri listeleme veya ortak özellik yöntemiyle gösteriniz.

a) T ∩ D

b) Ç \ D

c) G ∩ B

ç) G′

Kontrol Noktası



- Bir kümeyi oluşturan nesnelere o kümenin **elemanları** denir. a, A kümesinin elemanı ise **a ∈ A**; elemanı değilse **a ∉ A** biçiminde gösterilir. Kümelerde her eleman bir kez yazılır.
- Herhangi bir A kümesinin eleman sayısı, **s(A)** ile gösterilir.
- Herhangi iki küme A ve B olmak üzere bu kümelerin elemanlarının tamamının oluşturduğu kümeye **A ve B kümelerinin birleşim kümesi** denir, **A ∪ B** biçiminde gösterilir. A ∪ B ifadesi, "**A birleşim B**" biçiminde okunur. Burada kullanılan "∪" sembolü, "**birleşim**" anlamına gelir.
- Herhangi iki küme A ve B olmak üzere bu kümelerin ortak elemanlarından oluşan kümeye **A ve B kümelerinin kesişim kümesi** denir, A ∩ B biçiminde gösterilir. A ∩ B ifadesi, "**A kesişim B**" biçiminde okunur. Burada kullanılan "∩" sembolü, "**kesişim**" anlamına gelir.
- A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye **A fark B kümesi** denir, **A \ B** biçiminde gösterilir. A \ B ifadesi, "**A fark B**" biçiminde okunur. Burada kullanılan "\" sembolü, "**fark**" anlamına gelir.
- Üzerinde işlem yapılan kümelere ait tüm elemanları kapsayan kümeye **evrensel küme** denir. Gerçek sayılar kümesi; doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve irrasyonel sayıları kapsayan en geniş kümedir. Gerçek sayılar kümesi, evrensel küme olarak ifade edilir.
- Bir A kümesinin elemanı olmayıp evrensel kümeye ait olan elemanların oluşturduğu küme, **A′** ile ifade edilir; "**A kümesinin tümleyeni**" biçiminde okunur. Burada kullanılan " ′ " sembolü, "**tümleme**" anlamına gelir.
- Herhangi bir A kümesindeki elemanların tümü bir B kümesinin de elemanı ise bu durum **A kümesinin B kümesine eşit** veya **A kümesinin B kümesinin alt kümesi** olduğu anlamına gelir. **A ⊆ B** biçiminde gösterilir ve "**A alt kümesidir B nin**" biçiminde okunur. Burada kullanılan "⊆" sembolü, "**alt küme**" anlamına gelir.

Gerçek Sayı Aralıkları

Boks müsabakalarında sporcular kilolarına göre kategorilere ayrılmaktadır. Sporcuların yarışacağı kategoriler hafif sıklet, orta sıklet, ağır sıklet gibi terimlerle ifade edilmektedir. Örneğin genç erkek kategorisinde yer alan boksörlerde 69-75 kg arası olanlar orta sıklet, 81-91 kg arası olanlar ağır sıklet olarak isimlendirilir. Orta sıklet veya ağır síklette bulunan erkek boksörlerin kilolarının alacağı tüm sayı değerleri küme gösterimiyle nasıl ifade edilebilir? Küme gösterimi dışında farklı matematiksel gösterimler kullanılabilir mi? Buna benzer farklı gerçek yaşam durumlarına örnekler veriniz.

12. Uygulama



Aralıkların Gösterimi

Leyla'nın boyu 165 cm ve Ersin'in boyu 178 cm'dir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.



Leyla 165 cm   Ersin 178 cm

1. a) Ahmet'in boyu Leyla'nın boyundan uzun, Ersin'in boyundan kısa ise Ahmet'in boyunun alabileceği gerçek sayı değerleri küme gösterimi olarak nasıl ifade edilebilir?

b) Küme gösterimi olarak ortak özellik yöntemi mi, listeleme yöntemi mi tercih edilmelidir? Gerekçeleriyle birlikte açıklayınız.

2. Nehir'in boyu x cm olsun. Leyla ve Ersin'in boyuna göre x in alabileceği gerçek sayı değerlerinin bulunduğu aralık değerleri aşağıdaki tabloda dört farklı gösterimle verilmiştir. Tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

Sözel İfade	**Aralık Gösterimi ve Aralık Adı**	**Sayı Doğrusu Gösterimi**
Nehir'in boyu Leyla'nın boyundan uzun, Ersin'in boyundan kısadır.	$(165, 178)$ açık aralık	165 178
	Cebirsel Temsil	**Küme Gösterimi**
	$165 < x < 178$	$A = \{x \mid 165 < x < 178, x \in \mathbb{R}\}$

Sözel İfade	**Aralık Gösterimi ve Aralık Adı**	**Sayı Doğrusu Gösterimi**
Nehir'in boyu Leyla'nın boyuna eşit veya Leyla'nın boyundan uzun, Ersin'in boyundan kısadır.		
	Cebirsel Temsil	**Küme Gösterimi**



Sözel İfade	Aralık Gösterimi ve Aralık Adı	Sayı Doğrusu Gösterimi
Nehir'in boyu Leyla'nın boyundan uzun, Ersin'in boyuna eşit veya Ersin'in boyundan kısadır.		
	Cebirsel Temsil	**Küme Gösterimi**

Sözel İfade	Aralık Gösterimi ve Aralık Adı	Sayı Doğrusu Gösterimi
Nehir'in boyu Leyla'nın boyuna eşit veya Leyla'nın boyundan uzun, Ersin'in boyuna eşit veya Ersin' in boyundan kısadır.		
	Cebirsel Temsil	**Küme Gösterimi**

a) Tabloda sözel olarak verilen ifadelerin cebirsel temsil, sayı doğrusu, aralık ve küme gösterimleri arasındaki benzerlik ve farklılıkları yazınız.

b) Farklı durumlar için cebirsel temsil, sayı doğrusu, aralık ve küme gösterimi yöntemlerinden hangisinin daha kullanışlı olduğunu belirleyerek gerekçelerinizi yazınız.

15. ÖRNEK

Aşağıda verilen gerçek yaşam durumlarını ifade eden aralıkları cebirsel temsil, sayı doğrusu, aralık ve küme gösterimi yöntemiyle gösteriniz.

a) Su 0 °C'ta donup 100 °C'ta buharlaştığına göre suyun sıvı ve katı hâlde olduğu sıcaklık değerlerinin aralığı.

b) Lunaparktaki çarpışan arabalara binmek için boyunun en az 90 cm, en fazla 130 cm olması gerektiğine göre çarpışan arabalara binmek için gerekli boy aralığı.

c) Bir filmin başlangıç saati 15.00, bitiş saati 17.00 olduğuna göre filmin gösterildiği zaman aralığı.

ç) 1 saatlik yürüyüşte en az 250, en çok 350 kalori harcandığına göre bir saatlik yürüyüşte harcanan kalori miktarı aralığı.

d) Gümüş elementinin erime sıcaklığı yaklaşık olarak 960 °C olduğuna göre gümüş elementinin katı hâlde bulunmadığı sıcaklık değerlerinin aralığı.

Çözüm

a) Su, 0 °C'tan büyük ve 100 °C'tan küçük sıcaklık değerlerinde sıvı hâlde bulunur. Bu değerler, cebirsel olarak $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $0 < x < 100$ biçiminde ifade edilir. 0 ve 100 arasındaki gerçek sayılar, sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir. 0 ve 100 aralığa dâhil olmadığı için bu sayılar sayı doğrusunda işaretlenmez.



Aralık gösterimi $(0, 100)$, küme gösterimi $A = \{x \mid 0 < x < 100, x \in \mathbb{R}\}$ biçimindedir.

Su, 0 °C ve 0 °C'tan daha düşük sıcaklık değerlerinde katı hâlde bulunur. Bu aralık, cebirsel olarak $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x \leq 0$ biçiminde ifade edilir. Sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir. 0 aralığa dâhil olduğu için bu nokta, sayı doğrusunda işaretlenir.



Aralık gösterimi $(-\infty, 0]$, küme gösterimi $B = \{x \mid x \leq 0, x \in \mathbb{R}\}$ biçimindedir.

b) 90 ve 130 cm arasındaki uzunluk değerleri, cebirsel olarak $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $90 \leq x \leq 130$ biçiminde ifade edilir. Bu aralık, sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir. 90 ve 130 aralığa dâhil olduğu için bu noktalar da sayı doğrusunda işaretlenir.



Aralık gösterimi $[90, 130]$, küme gösterimi $C = \{x \mid 90 \leq x \leq 130, x \in \mathbb{R}\}$ biçimindedir.

c) Filmin gösterildiği zaman aralığı; 15'e eşit ve 15'ten büyük, 17'den küçük zaman değerlerinin aralığıdır. Bu aralık, cebirsel olarak $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $15 \leq x < 17$ biçiminde ifade edilir. Sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir. 15 aralığa dâhil olduğundan sayı doğrusunda işaretlenir, 17 aralığa dâhil olmadığından sayı doğrusunda işaretlenmez.



Aralık gösterimi $[15, 17)$, küme gösterimi $D = \{x \mid 15 \leq x < 17, x \in \mathbb{R}\}$ biçimindedir.

ç) 250 ve 300 arasındaki kalori değerleri, cebirsel olarak $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $250 \leq x \leq 300$ biçiminde ifade edilir. Sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir. 250 ve 300 aralığa dâhil olduğu için bu noktalar da sayı doğrusunda işaretlenir.



Aralık gösterimi $[250, 300]$, küme gösterimi $F = \{x \mid 250 \leq x \leq 300, x \in \mathbb{R}\}$ biçimindedir.

d) Gümüş elementi, sıcaklığı 960 °C'a eşit ve 960 °C'tan yüksek olduğunda katı hâlde bulunmaz. Bu sıcaklık aralığı, cebirsel olarak $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x \geq 960$ biçiminde ifade edilir. Sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir. 960 aralığa dâhil olduğu için bu nokta, sayı doğrusunda işaretlenir.



Aralık gösterimi $[960, \infty)$, küme gösterimi $G = \{x \mid x \geq 960, x \in \mathbb{R}\}$ biçimindedir.

9. Sıra Sizde

Aşağıdaki tabloda gerçek sayı aralıklarının farklı gösterimleri verilmiştir.
Buna göre tabloda eksik olan bölümleri uygun şekilde doldurunuz.

Cebirsel Temsil	Aralık Gösterimi ve Aralık Adı	Sayı Doğrusu Gösterimi	Küme Gösterimi
		(sayı doğrusu: 1 ve 17 noktaları boş daire, aralarında kırmızı çizgi) 1 17	
$-5 \leq x < 3,5$			
	$(6, 4\sqrt{5}]$ yarı açık aralık		
			$D = \{x \mid -3,9 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$
$x > \frac{7}{8}$			



13. Uygulama

Gerçek Sayı Aralıkları ve Sayı Aralıklarında İşlemler

Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

Bir eğlence parkında macera odasına giriş, nefeskesen ve dönen şato oyuncaklarına biniş olmak üzere 3 farklı bilet satılmaktadır. Biletlerin kullanım kuralları aşağıdaki gibidir.



- Boyu 140 cm ve 180 cm arasındaki (140 ve 180 dâhil) misafirler için uygundur.
- 13 yaş ve üstü için uygundur.
- 13 ve 14 yaş arasındaki (13 ve 14 dâhil) çocuklar, yanlarında refakatçi olmadan giremez.



- Boyu 150 cm ve 196 cm arasındaki (150 ve 196 dâhil) misafirler için uygundur.
- 12 yaş ve üstü için uygundur.
- 12 ve 15 yaş arasındaki (12 ve 15 dâhil) çocuklar, yanlarında refakatçi olmadan binemez.



- Boyu 130 cm ve 190 cm arasındaki (130 ve 190 dâhil) misafirler için uygundur.
- 10 yaş ve üstü için uygundur.
- 10 ve 12 yaş arasındaki (10 ve 12 dâhil) çocuklar, yanlarında refakatçi olmadan binemez.



1. Lunaparka gelen bir kişinin macera odası bileti alabildiği fakat nefeskesen bileti alamadığı bilindiğine göre bu kişinin boyu hangi aralıkta olabilir? Bulduğunuz aralığı cebirsel temsil, küme ve aralık olarak gösteriniz.

2. Macera odası, nefeskesen ve dönen şato biletlerini alabilmeniz için boyunuzun hangi aralıkta olması gerekir? Bulduğunuz sonucu aralık olarak gösteriniz.

3. Yanında refakatçisi olan ve 13 yaşından büyük birinin üç bileti de alabilmesi için boyu hangi aralıkta olmalıdır?

4. Aşağıda boy, yaş ve refakatçi bilgileri verilen dört arkadaşın hangi biletleri alıp alamayacaklarını belirleyerek tabloyu örnekteki gibi doldurunuz. Verilen soruları cevaplayınız.

Kişiler	Boy (cm)	Yaş	Refakatçi	Macera Odası Bileti	Nefeskesen Bileti	Dönen Şato Bileti
Deniz	141	13	Yok.	Alamaz.	Alamaz.	Alabilir.
Tekin	160	14	Yok.			
Sevgi	134	11	Var.			
Pınar	152	13	Var.			

a) Tablodaki kişilerden hangileri, sadece dönen şato bileti alabilir?

b) Tablodaki kişilerden hangileri, hem nefeskesen hem de macera odası bileti alabilir?

c) Tablodaki kişilerden hangileri macera odası bileti alamaz?

ç) Tablodaki kişilerden hangileri, macera odası bileti alıp nefeskesen bileti alamaz?

10. Sıra Sizde

Dilan Hanım cumartesi günü Kerem'i resim, Sıla'yı aynı binada bulunan bale kursuna götürecektir. Dilan Hanım evden çocuklarıyla birlikte çıkacak, kurslar bitene kadar onları bekleyecek, çocuklarıyla birlikte eve dönecektir. Resim kursu saat 10.00'da başlayıp 14.00'te bitmektedir. Bale kursu saat 11.00'de başlayıp 13.00'te bitmektedir.

Buna göre aşağıda belirtilen zaman aralıklarının sayı doğrusu üzerinde, aralıkla ve cebirsel temsillerle gösterimini içeren tablodaki boşlukları uygun ifadelerle doldurunuz.

a) **Kursların devam ettiği zaman aralığı.**

b) **Hem resim hem de bale kursunun aynı anda olduğu zaman aralığı.**

c) **Çocuklarını resim ve bale kursuna bırakan Dilan Hanım'ın çocuklarını beklediği zaman aralığı.**

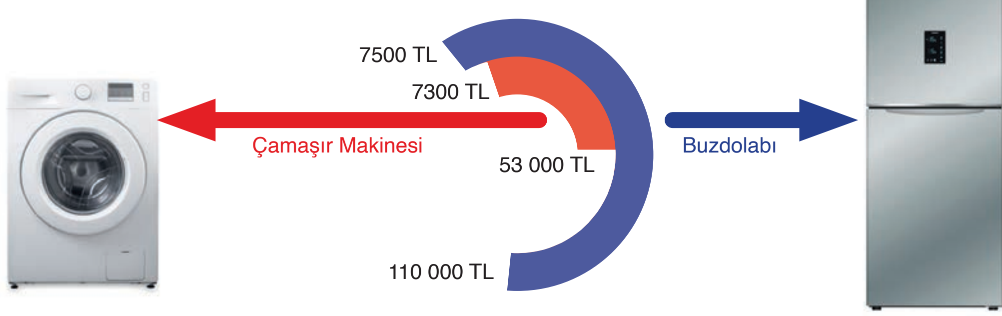
ç) **Dilan Hanım'ın Sıla ile birlikte Kerem'i beklediği zaman aralığı.**

d) **Cumartesi günü Kerem'in resim kursunda olmadığı zaman aralığı.**

Zaman Aralığının Küme Gösterimi	Sayı Doğrusu Gösterimi	Aralık Gösterimi	Cebirsel Temsil $(x \in \mathbb{R})$
a) A kümesi (Resim Kursu) B kümesi (Bale Kursu)	10 14	$[10, 14)$	$10 \leq x < 14$
b) $A \cap B$	A: 10 14 B: 11 13 $A \cap B$: 11 13		
c) $A \cup B$			
ç) $A \setminus B$	A: 10 14 B: 11 13 $A \setminus B$: 10 11 13 14		
d) A'		$[0, 10) \cup [14, 24)$	

16. ÖRNEK

Ali Bey, evindeki buzdolabı ve çamaşır makinesini yenilemek istediği için bir fiyat araştırması yapmıştır. Yaptığı araştırma sonucunda Ali Bey'in buzdolabı ve çamaşır makinesinin fiyat aralıklarına ilişkin ulaştığı veriler, aşağıdaki görselde ifade edilmiştir.



Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

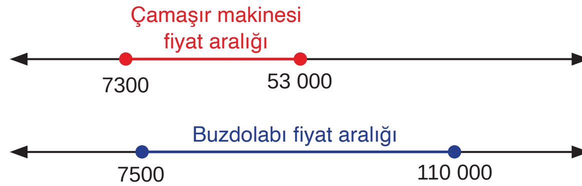
a) Çamaşır makinesi ve buzdolabı fiyat aralıklarını sayı doğrusu üzerinde, aralık şeklinde ve cebirsel olarak gösteriniz.

b) Çamaşır makinesi fiyat aralığındaki gerçek sayılar kümesi A, buzdolabı fiyat aralığındaki gerçek sayılar kümesi B olmak üzere $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$ ve A' kümelerini cebirsel olarak gösteriniz.

c) Ali Bey, seçtiği çamaşır makinesini peşin ödeyerek satın almaya karar vermiştir. Bankamatikten çektiği paralar sadece 200 Türk liralık banknotlardan oluştuğuna göre Ali Bey'in bankamatikten çektiği banknot sayısının en az ve en fazla kaç adet olabileceğini bulunuz.

Çözüm

a) Görsel incelendiğinde çamaşır makinesi fiyatlarının $[7300, 53\,000]$nda ve buzdolabı fiyatlarının $[7500, 110\,000]$nda değiştiği görülmektedir. Bu fiyat aralıkları, sayı doğrusunda aşağıdaki gibi gösterilir.



$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $[7300, 53\,000]$ nın cebirsel gösterimi $7300 \leq x \leq 53\,000$ ve $[7500, 110\,000]$nın cebirsel temsili $7500 \leq x \leq 110\,000$ biçimindedir.

b) $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$A \cap B$ kümesinin cebirsel temsili $7500 \leq x \leq 53\,000$,

$A \cup B$ kümesinin cebirsel temsili $7300 \leq x \leq 110\,000$,

$B \setminus A$ kümesinin cebirsel temsili $53\,000 < x \leq 110\,000$,

A' kümesinin cebirsel temsili $x < 7300$ ve $x > 53\,000$ biçimindedir.

c) Ali Bey en ucuz çamaşır makinesinden almak isterse satıcıya 7400 Türk lirası ödemeli ve 100 Türk lirası para üstü almalıdır. 7400 Türk lirası ödemesi için Ali Bey'in bankamatikten en az $\frac{7400}{200} = 37$ adet 200 Türk liralık banknot çekmesi gerekir. Benzer şekilde en pahalı çamaşır makinesinden almak isterse satıcıya 53 000 Türk lirası ödemesi gerekir. 53 000 Türk lirası ödemesi için bankamatikten en fazla $\frac{53\,000}{200} = 265$ adet 200 Türk liralık banknot çekmesi gerekir.

11. Sıra Sizde

Tabloda 1 aylık kız ve erkek bebeklerin baş çevrelerinin olması gereken en az ve en çok uzunluk değerleri verilmiştir.

	Baş Çevresi Uzunluğu (cm)	
	En Az	**En Çok**
Kız Bebek	34,8	39,5
Erkek Bebek	35,3	40,5

Kız bebeklerin ideal baş çevresi uzunluğunun değer aralığı A kümesiyle, erkek bebeklerin ideal baş çevresi uzunluğunun değer aralığı B kümesiyle gösterilsin.

Buna göre aşağıdaki kümeleri sayı doğrusu üzerinde gösteriniz. Küme gösterimi ve cebirsel temsille ifade ediniz.

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) $A \setminus B$

ç) $B \setminus A$

d) A'

e) B'

Aralıkların Mutlak Değer Gösterimi



Görsel 1.4: *1915 Çanakkale Köprüsü*

1915 Çanakkale Köprüsü toplam 4608 metre uzunluğunda olup dünyanın en uzun asma köprüsüdür (Görsel 1.4). Sıcaklık değişimi nedeniyle asma köprüler, bir miktar esneme ve daralma payına sahiptir. Asma köprülerin esneme veya daralma payı, en fazla 2 metredir. 1915 Çanakkale Köprüsü'nün uzunluğunun esneme veya daralma sonucu alabileceği sayı değerleri hangi matematiksel kavramlarla ifade edilebilir?

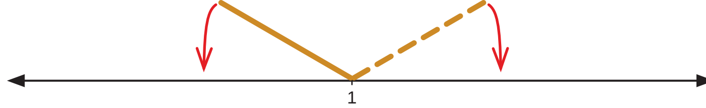
14. Uygulama



Aralıkların Mutlak Değer Gösterimi

Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

Uzunluğu 3 birim olan ipin bir ucu, sayı doğrusu üzerindeki 1 noktasına sabitleniyor. İpin diğer ucu gergin bir şekilde 1 noktasının soluna ve sağına doğru şekildeki gibi uzatılarak sayı doğrusunun üzerine çakıştırılıyor.



1. İpin ucunun sayı doğrusu üzerinde ulaşabileceği en büyük ve en küçük değerler hangileridir?

2. İpin sayı doğrusu üzerinde temas edebildiği gerçek sayılar kümesini ifade eden aralığı sayı doğrusu üzerinde, cebirsel olarak ve kümeyle gösteriniz.

3. İpin sayı doğrusu üzerinde ulaşabildiği gerçek sayılar kümesini ifade eden aralık, mutlak değerli eşitsizlik olarak nasıl ifade edilebilir? Bu gösterimin ne anlama geldiğini nasıl ifade edebilirsiniz? Fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

4. İpin sayı doğrusu üzerinde ulaşamadığı gerçek sayılar kümesi aralık, mutlak değerli eşitsizlik olarak nasıl ifade edilebilir? Bu gösterimin ne anlama geldiğini nasıl ifade edebilirsiniz? Fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

17. ÖRNEK

Aşağıdaki tabloda A ve B bitkilerinin dayanabildikleri en düşük ve en yüksek ortalama sıcaklık (°C) değerleri verilmiştir.

	Bitkinin Dayanabildiği En Düşük Ortalama Sıcaklık Değeri (°C)	**Bitkinin Dayanabildiği En Yüksek Ortalama Sıcaklık Değeri (°C)**
A	−11	41
B	−20	10

Tablodaki bilgilerden yararlanarak A ve B bitkilerinin sıcağa dayanıklılık aralıklarını mutlak değerli eşitsizlik olarak ifade ediniz.

Çözüm

- A bitkisinin dayanabildiği en düşük ve en yüksek sıcaklıkların ortalaması $\frac{-11+41}{2} = 15$ °C'tur. 15'in −11 ve 41'e olan uzaklığı, $|-11-15| = |41-15| = 26$ olarak bulunur. Buna göre bitkinin dayanabildiği en düşük ve en yüksek sıcaklık değeri, bu değerlerin ortalamasından 26 °C sapmaktadır. Buradan A bitkisinin sıcağa dayanıklılık aralığı $[-11, 41]$ olup mutlak değerli eşitsizlik olarak $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x-15| \leq 26$ biçiminde gösterilir.

- B bitkisinin dayanabildiği en düşük ve en yüksek sıcaklıkların ortalaması $\frac{-20+10}{2} = -5$ °C'tur. −5'in −20 ve 10'a olan uzaklığı, $|-20-(-5)| = |10-(-5)| = 15$ olarak bulunur. Buna göre bitkinin dayanabildiği en düşük ve en yüksek sıcaklık değeri, bu değerlerin ortalamasından 15 °C sapmaktadır. Buradan B bitkisinin sıcağa dayanıklılık aralığı $[-20, 10]$ olup mutlak değerli eşitsizlik olarak $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x-(-5)| \leq 15 \Rightarrow |x+5| \leq 15$ biçiminde gösterilir.

18. ÖRNEK

Bir a gerçek sayısı ile 5 sayısı arasındaki farkın $\frac{21}{4}$'ten büyük olduğu biliniyor. Bu şartı sağlayan gerçek sayıları mutlak değerli eşitsizlik ve aralık şeklinde ifade ediniz.

Çözüm

a gerçek sayısı ile 5 sayısı arasındaki fark $|a-5|$ olarak ifade edilir. Buradan soruda verilen ifade mutlak değerli eşitsizlik olarak $|a-5| > \frac{21}{4}$ şeklinde yazılır. $|a-5| > \frac{21}{4}$ eşitsizliği, cebirsel olarak $a-5 > \frac{21}{4}$ veya $-a+5 > \frac{21}{4}$ şeklinde gösterilir.

Buradan $a-5 > \frac{21}{4} \Rightarrow a > \frac{21}{4}+5 \Rightarrow a > \frac{41}{4}$ veya $-a+5 > \frac{21}{4} \Rightarrow 5-\frac{21}{4} > a \Rightarrow -\frac{1}{4} > a$ olur.

Bulunan cebirsel ifadelerin aralık gösterimi $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{41}{4}, \infty\right)$ şeklindedir.

12. Sıra Sizde

1. İnsanlarda ortalama ideal vücut sıcaklığı değeri 37 °C’tur. Bu değerin 4 °C üzerindeki değerlerde nefes alamama, şiddetli baş ağrısı, bayılma, su kaybı ve aşırı terleme görülür; tıbbi müdahale gerekir. Benzer şekilde 37 °C’un 4 °C altındaki değerlerde birey bazı hareketlere tepki veremez, nefes almakta güçlük çeker, bireyin nabzı düşer ve uykusu gelir. Her iki durumda da birey hayati risk taşıyan vücut sıcaklığı eşik değerine gelir.

   Buna göre hayati risk taşımayan vücut sıcaklığı aralığını mutlak değerli eşitsizlik olarak yazınız.

2. Bir akvaryumda bulunan balıklar için ideal su sıcaklığı 25 °C’tur. Su sıcaklığını kontrol eden bir sıcaklık motoru, ideal sıcaklık ile ölçülen sıcaklık arasında 3 °C’tan fazla fark olması durumunda devreye girerek suyu balıkların ideal yaşama sıcaklığına getirmektedir.

   Buna göre sıcaklık motorunun devreye gireceği sıcaklık aralığını mutlak değerli eşitsizlik olarak yazınız.

Performans Görevi

Aydınlatma Ürünlerinin Enerji Verimliliği

η_{TM}, bir optik sistemdeki ışık geçiş verimliliğini ifade eden verimlilik katsayısıdır. Işığın optik sisteme girişinden çıkışına kadar ışık enerjisinin ne kadarının sistemi geçtiği, ne kadarının sistemde kaybolduğu bu verimlilik katsayısıyla ifade edilir. 1 Eylül 2021'de yürürlüğe giren yasa ile aydınlatma ürünleri için enerji verimliliğini ifade eden sınıflama zorunlu hâle getirilmiştir.

Bu görevde sizden aydınlatma ürünlerinin verimlilik katsayılarına, enerji verimliliği sınıfına, okulunuzda bulunan aydınlatma ürünlerinin enerji verimliliğine göre hangi sınıfta olduğuna dair bilgileri araştırmanız, elde ettiğiniz verileri sınıfta farklı matematiksel temsillerle göstermeniz, araştırdığınız bilgiler yardımıyla tabloyu doldurmanız ve çalışmanızı sınıfta poster şeklinde hazırlayarak sınıf arkadaşlarınıza sunmanız beklenmektedir.

Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususa dikkat ediniz.

- Çalışmanın yapılış basamaklarını belirleyiniz.

Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz.

- Araştırmanız sonucunda elde ettiğiniz bilgilerden yararlanarak tabloyu uygun değerlerle doldurunuz.

Enerji Verimliliği Sınıfı	η_{TM} Verimlilik Katsayısının Değer Aralığı (lm/W)
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	

- A, B, C, D, E, F ve G verimlilik sınıflarına ait η_{TM} aralıklarını sayı doğrusu üzerinde, cebirsel ve küme gösterimiyle ifade ediniz.
- Aşağıda η_{TM} değerleri verilen aydınlatma ürünlerinin hangi enerji verimliliği sınıfında olabileceğini tablodaki bilgilerden yararlanarak bulunuz.

  a) $\eta_{TM} = 3^5$ lm/W

  b) $\eta_{TM} = 0,0128 \cdot 10^4$ lm/W

  c) $\eta_{TM} = 60\sqrt{10}$ lm/W

Görev bitiminde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz.

- Tabloyu, görselleri ve elde ettiğiniz bilgileri sınıf ortamında poster şeklinde hazırlayarak arkadaşlarınıza sununuz.
- Çalışmanızı öğretmeninize zamanında teslim ediniz.

Performans göreviniz, analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik dereceli puanlama anahtarına ulaşmak için karekodu okutunuz.



Kontrol Noktası



- Sayı doğrusu, gerçek sayıların bir temsilidir.
- Gerçek sayı aralıkları sayı doğrusu üzerinde, cebirsel ve küme gösterimiyle ifade edilebilir.
- Gerçek sayı aralıkları ve bu aralıklarla yapılacak işlemler için evrensel küme, gerçek sayılar kümesidir.
- $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere gerçek sayı aralıklarının gösterim biçimleri tablodaki gibi ifade edilebilir.

Aralık	Sayı Doğrusu	Cebirsel Temsil $(x \in R)$	Küme Gösterimi
(a, b)	a b	$a < x < b$	$A = \{x \mid a < x < b, x \in \mathbb{R}\}$
$[a, b)$	a b	$a \leq x < b$	$B = \{x \mid a \leq x < b, x \in \mathbb{R}\}$
$(a, b]$	a b	$a < x \leq b$	$C = \{x \mid a < x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$
$[a, b]$	a b	$a \leq x \leq b$	$D = \{x \mid a \leq x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$
$(-\infty, a)$	a	$x < a$ veya $a > x$	$F = \{x \mid x < a, x \in \mathbb{R}\}$
$(-\infty, a]$	a	$x \leq a$ veya $a \geq x$	$G = \{x \mid x \leq a, x \in \mathbb{R}\}$
(b, ∞)	b	$x > b$ veya $b < x$	$H = \{x \mid x > b, x \in \mathbb{R}\}$
$[b, \infty)$	b	$x \geq b$ veya $b \leq x$	$I = \{x \mid x \geq b, x \in \mathbb{R}\}$

- (a, b) nın mutlak değerli eşitsizlik olarak gösterimi $x \in \mathbb{R}$, $c = \dfrac{a+b}{2}$ ve $d = \dfrac{|a-b|}{2}$ olmak üzere $|x - c| < d$ biçimindedir.
- $[a, b]$ nın mutlak değerli eşitsizlik olarak gösterimi $x \in \mathbb{R}$, $c = \dfrac{a+b}{2}$ ve $d = \dfrac{|a-b|}{2}$ olmak üzere $|x - c| \leq d$ biçimindedir.

$x, a \in \mathbb{R}$ ve $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

- $|x - a| < b$ eşitsizliğinin aralık gösterimi, $(-b + a, b + a)$ biçimindedir.
- $|x - a| \leq b$ eşitsizliğinin aralık gösterimi, $[-b + a, b + a]$ biçimindedir.
- $|x - a| > b$ eşitsizliğinin aralık gösterimi, $(-\infty, -b + a) \cup (b + a, \infty)$ biçimindedir.
- $|x - a| \geq b$ eşitsizliğinin aralık gösterimi, $(-\infty, -b + a] \cup [b + a, \infty)$ biçimindedir.



Alıştırmalar

1. Aşağıdaki tabloda gerçek sayı aralıklarının farklı gösterimleri verilmiştir.
Buna göre tabloda boş bırakılan bölümleri uygun şekilde doldurunuz.

Sözel İfade	Cebirsel Temsil $(x \in \mathbb{R})$	Küme ve Aralık Gösterimi	Sayı Doğrusu Üzerinde Gösterim
En küçük iki basamaklı negatif tam sayı ile en küçük üç basamaklı pozitif tam sayı arasındaki gerçek sayılar			
	$-\frac{13}{3} \leq x < \frac{1}{2}$		
		$C = \{x \mid 1 < x, x \in \mathbb{R}\}$ $(1, \infty)$	
	$(-2)^3 < x < \sqrt{3}$		
			-25 81

2. $x \in \mathbb{R}$ **olmak üzere aşağıda verilen mutlak değerli eşitsizlikleri aralık gösterimiyle yazınız.**

a) $|x - 1| < 7$

b) $|x + 2| \leq 4$

c) $\left|x - \frac{3}{2}\right| > 5$

ç) $\left|x - \sqrt{2}\right| \geq \sqrt{8}$

3. Aşağıda verilen ifadeleri mutlak değerli eşitsizlik olarak yazınız.

a) $\left(\frac{11}{3}, \frac{19}{3}\right)$

b) $[\pi, 3\pi]$

c) $(-\infty, -1) \cup (7, \infty)$

ç) $\left(-\infty, -\frac{11}{6}\right] \cup \left[-\frac{5}{6}, \infty\right)$

4. $A = [-2, 13]$ **ve** $B = (-4, 10]$ **gerçek sayı aralıkları olmak üzere aşağıdaki kümeleri sayı doğrusu üzerinde gösteriniz ve cebirsel temsille ifade ediniz.**

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) $A \setminus B$

ç) $B \setminus A$

d) A'

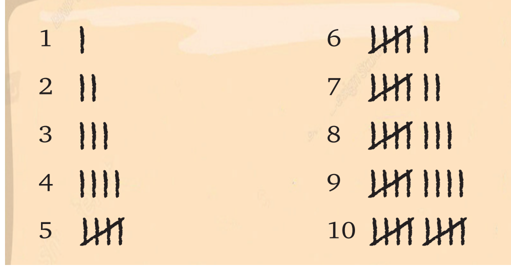
e) B'

5. Bir havacılık ve uzay bilimleri fakültesi, kayıt ve kabul koşullarında pilotaj bölümüne alınacak öğrencilerin boyunun en az 165 cm ve en fazla 195 cm olması gerektiğini belirtmiştir.

Buna göre pilotaj bölümüne kabul için gerekli boy aralığını mutlak değerli eşitsizlik olarak yazınız.

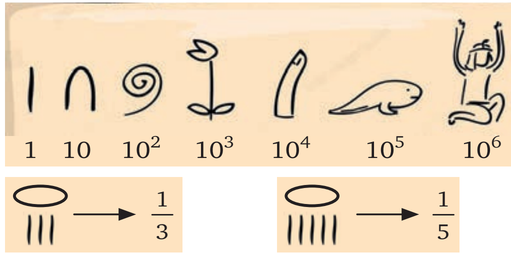
1.3. SAYI KÜMELERİNİN ÖZELLİKLERİ

Konuya Başlarken 



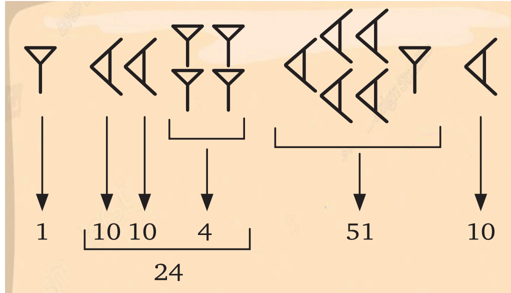
Görsel 1

Eski çağlardan itibaren insanlar mevsim ve ay döngülerini takip etmek, avladıkları hayvan sayısının miktarını belirtmek gibi durumlar için mağara duvarlarına veya ağaç gövdelerine attıkları çentiklerden yararlanmışlardır (Görsel 1).



Görsel 2

Antik Mısır medeniyetinde yaklaşık 3000 yıl önce sayılar, hiyerogliflerin tekrar edilmesiyle ifade edilmiştir. Büyük sayıları göstermek için onun katlarını tercih eden Antik Mısırlılar, kesirleri birim kesirler yardımıyla göstermiştir (Görsel 2).



Görsel 3

Konumsal yazım, matematikte sayıların değerinin sayının yazılışındaki konumuna bağlı olduğu bir sayı yazım sistemidir. Sembolleri tekrar ederek büyük sayıları yazmak zorlaşınca bazı medeniyetler, sayıların gösteriminde konumsal yazımı tercih etmiştir. Mezopotamya coğrafyasında MÖ 1894-MÖ 539 yılları arasında hüküm süren Babilliler, altmışlık sayı sistemiyle konumsal yazım kullanmıştır (Görsel 3).

Örneğin YBC 7289 adındaki Babil kil tabletinde Görsel 3'te verilen sayı yer almaktadır. Bu sayının günümüzdeki gösterimi $1 \cdot 60^0 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3}$ şeklindedir. Babilliler, gösterimlerinde basamakları ayırmak için aralarına boşluk koymuştur.

Buna göre aşağıdaki sorularla ilgili fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

1. Antik Mısırlıların kullandığı 10 ve 10'un kuvveti olan sayılar, günümüzde farklı olarak üslü şekilde gösterilmektedir. Bu farklılığın sebepleri neler olabilir?

2. Mezopotamya coğrafyasında hangi sayı sistemlerinden yararlanılmıştır?

3. Babillilerin kullandığı $1 \cdot 60^0 + 24 \cdot 60^{-1} + 51 \cdot 60^{-2} + 10 \cdot 60^{-3}$ ifadesi 1,4142'ye eşittir. Babilliler, bu gösterimle ifade ettikleri sayıları günlük hayatta hangi amaçla kullanmış olabilir?

Sayı kümelerinin tarihî gelişimi, matematiksel düşüncenin insan ihtiyaçlarını karşılamak için nasıl değiştiğini göstermektedir. Her bir yeni kavram ve sayı kümesi, matematiksel bilgi birikimini genişletmiş ve matematiğin uygulamalarını çeşitlendirmiştir.

15. Uygulama



Serbest Düşme

Üçer kişilik gruplara ayrılarak aşağıda verilen problemi inceleyiniz ve soruları cevaplayınız.

Bir cismin yer çekimi kuvvetinin etkisiyle düşey doğrultuda yaptığı hareket, serbest düşmedir. Düşme sırasında cismin üzerine herhangi bir dış kuvvet uygulanmaz ve hava direnci gibi faktörler de göz ardı edilir. g yer çekimi ivmesini (m/sn^2) göstermek üzere düşey doğrultuda serbest düşme hareketi yapan bir cismin t saniye sonunda ilk konumuna göre yer değiştirme (m) miktarı $x = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ eşitliği ile hesaplanabilir.

Yer çekimi ivmesi gök cisimlerine göre farklılık göstermektedir. Tablo 1'de Dünya, Ay ve Mars'ın yer çekimi ivmelerinin (m/sn^2) yaklaşık değerleri verilmiştir.

Tablo 1

Gök Cismi	Yer Çekimi İvmesi (m/sn^2)
Dünya	9,8
Ay	1,6
Mars	3,7

Tablo 2'de farklı gök cisimlerinde aynı yükseklikten bırakılan bir cismin serbest düşme hareketi yaparken ilk konumuna göre bazı yer değiştirme miktarları (m) verilmiştir.

Örneğin Dünya'da belirli bir yükseklikten serbest düşme hareketine başlayan bir cismin 2 saniye sonunda ilk konumuna göre yer değiştirme miktarı (m), yaklaşık olarak $x = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot 2^2 = 19{,}6$ m bulunur.

Tablo 2

Dünya		Ay		Mars	
t (sn.)	x (m)	t (sn.)	x (m)	t (sn.)	x (m)
2	19,6	2		2	
1,3		1,3		1,3	
1,25		1,25		1,25	

Grup içinde her bir kişinin birer gök cismini seçmesi koşuluyla gök cisimlerini paylaşarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Hesap makinesi yardımıyla Tablo 2'yi örnekteki gibi tamamlayınız.

2. Tablo 2'de elde edilen yer değiştirme miktarlarını ifade etmek için hangi sayı kümelerine ve sayıların farklı temsillerine ihtiyaç duyulduğunu gerekçeleriyle açıklayınız.

3. "Mars'ta belirli bir yükseklikten serbest düşme hareketine başlayan bir cisim, kaç saniye sonra ilk konumuna göre 74 m yer değiştirir?" sorusunu cevaplamak için hangi sayı kümelerinin elemanlarına ihtiyaç vardır?

Sayı Kümelerinin Sıralı Olması ve Herhangi İki Sayı Arasındaki Sayıları Belirleme

Sayı kümelerinin sıralı olması, o kümedeki elemanların birbirleriyle karşılaştırılabilir ve bir düzen içinde sıralanabilir olması anlamına gelir.

16. Uygulama



Sayı Kümelerinin Sıralama Özelliklerini İnceleme

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Doğal sayılar ($\mathbb{N}$), tam sayılar ($\mathbb{Z}$), rasyonel sayılar ($\mathbb{Q}$) ve gerçek sayılar ($\mathbb{R}$) kümelerinde sıralama ile ilgili hangi özelliklerin olduğu söylenebilir? Varsayımlarınızı sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışarak oluşturunuz.

2. Tabloda gerçek sayılar kümesinin sıralama özellikleri verilmiştir. Her sayı kümesi için o kümeden seçeceğiniz a, b, c sayıları ile sıralama özelliklerinin geçerli olup olmadığını bularak tabloda uygun yerlere örnekteki gibi yazınız.

Sayı Kümeleri / Sıralama Özelliği	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$a \leq a$	$3 \leq 3$	$-2 \leq -2$	$\frac{2}{5} \leq \frac{2}{5}$	$\sqrt{5} \leq \sqrt{5}$
$a \leq b$ veya $b \leq a$				
$a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$ dir.				
$a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$ dir.				
$a \leq b$ ise $a + c \leq b + c$ dir.				
$a \leq b$ ve $0 \leq c$ ise $a \cdot c \leq b \cdot c$ dir.				
$a \leq b$ ve $0 \geq c$ ise $a \cdot c \geq b \cdot c$ dir.				
$0 < a < b$ veya $a < b < 0$ ise $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ dir.				
$0 < a < b$ ise $a^n < b^n$ dir. $(n \in Z^+)$				



3. Tabloda elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinin sıralama özellikleriyle ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

4. Varsayımlarınızla genellemelerinizi karşılaştırarak $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinin sıralama özelliklerine dair önermelerinizi oluşturunuz.

5. Oluşturduğunuz önermeler yardımıyla aşağıda verilen problemi çözünüz. Önermelerin problemin çözümünde ne tür kolaylıklar sağladığını ve başka hangi problem durumlarında kullanılabileceğini sınıf arkadaşlarınızla tartışınız.

A, B ve C bitkilerinin boyları (cm) ile ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

A bitkisinin boyu, C bitkisinin boyundan uzundur.

B bitkisinin boyu, C bitkisinin boyuna eşit veya C bitkisinin boyundan kısadır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) A ve C, B ve C, A ve B bitkilerinin boylarını karşılaştırarak aralarındaki ilişkiyi eşitsizlik sembolleriyle ifade ediniz.

b) A, B ve C bitkilerinin boyları (cm), hangi sayı kümelerinin elemanı olabilir? Üç bitkinin boyları arasındaki ilişkiler, sayı kümelerinin hangi sıralama özellikleriyle açıklanabilir?

6. Oluşturduğunuz önermeleri matematiksel olarak doğrulayınız. Doğrulama yöntemlerinizi sınıf arkadaşlarının kullandığı yöntemlerle karşılaştırarak kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

19. ÖRNEK

“a, b $\in \mathbb{Q}$, b $<$ a olmak üzere a ve b nin toplamının yarısı b den büyük, a dan küçüktür.” önermesinin doğru olup olmadığını cebirsel olarak ispatlayınız.

Çözüm

Önerme: $a, b \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $b < a$ ise $b < \frac{a+b}{2} < a$ olur.

Hipotez: $a, b \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $b < a$ olsun.

Hüküm: $b < \frac{a+b}{2} < a$ olur.

İspatın adımları aşağıdaki gibidir.

1. adım: Ortalama alınır.

a ve b nin aritmetik ortalaması $\frac{a+b}{2}$ olur.

2. adım: Eşitsizliğin iki tarafı b ile toplanarak b nin ortalamadan küçük olduğu gösterilir.

$b < a \Rightarrow b + b < a + b \Rightarrow 2b < a + b \Rightarrow b < \frac{a+b}{2}$ olur.

3. adım: Eşitsizliğin her iki tarafı a ile toplanarak a nın ortalamadan büyük olduğu gösterilir.

$b < a \Rightarrow a + b < a + a \Rightarrow a + b < 2a \Rightarrow \frac{a+b}{2} < a$ olur.

4. adım: 2 ve 3. adımlarda elde edilen eşitsizlikler yardımıyla $b < \frac{a+b}{2} < a$ elde edilerek hükme ulaşılır. Bu durumda önermenin doğru olduğu ispatlanmış olur.

13. Sıra Sizde

Gerçek sayılarda sıralama özellikleri yardımıyla x, y, m ve $n \in \mathbb{R}$ **olmak üzere** $x < y$ **ve** $m < n$ **için** $x + m < y + n$ **olup olmadığını cebirsel olarak ispatlayınız.**

Bir sayı kümesindeki herhangi iki sayı arasında aynı sayı kümesinden başka bir sayının yer alması, o kümenin **arada olma** özelliğine sahip olduğunu gösterir.

Örneğin bir mühendis, bir köprü veya bina tasarlarken yapının taşıyacağı maksimum ve minimum yükleri hesaplar. Arada olma özelliği sayesinde bu iki yük arasındaki herhangi bir değerin yapıyı güvenle taşıyabileceğini bilir ve buna göre tasarım yapar.

17. Uygulama



Sayı Kümelerinin Arada Olma Özelliğini İnceleme

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Doğal sayılar ($\mathbb{N}$), tam sayılar ($\mathbb{Z}$), rasyonel sayılar ($\mathbb{Q}$) ve gerçek sayılar ($\mathbb{R}$) kümelerinde arada olma özelliği ile ilgili varsayımlarınızı oluşturunuz.

2. Tabloda $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerindeki bazı elemanlar verilmiştir. Sayı kümelerine ait elemanların arasında o sayı kümesine ait başka bir eleman ya da elemanlar var ise yazarak tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

$\mathbb{N}$		$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Q}$		$\mathbb{R}$	
Hangi Sayılar Arasında Arandığı	**Aradaki Sayı Örneği**	**Hangi Sayılar Arasında Arandığı**	**Aradaki Sayı Örneği**	**Hangi Sayılar Arasında Arandığı**	**Aradaki Sayı Örneği**	**Hangi Sayılar Arasında Arandığı**	**Aradaki Sayı Örneği**
1 ile 3	2	-2 ile -1	–	0 ile 1	$\frac{1}{8}$	2 ile 3	$\frac{5}{2}$
0 ile 5		-5 ile -3		-3 ile 2		$\frac{1}{2}$ ile $\frac{3}{4}$	
51 ile 60		-11 ile 11		-1 ile 0		$\sqrt{3}$ ile 2	
45 ile 46		3 ile 4		$\frac{1}{3}$ ile $\frac{1}{2}$		$-\sqrt{5}$ ile 0	
100 ile 500		5 ile 9		-2 ile $-\frac{3}{2}$		3,002 ile 3,02	
0 ile 1		-18 ile -16		$\frac{5}{7}$ ile $\frac{6}{7}$		$\sqrt{2}$ ile 1,5	

3. Tablodan elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak verilen sayı kümelerinde arada olma özelliği ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

4. Varsayımlarınızla genellemelerinizi karşılaştırarak $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinin arada olma özelliğine dair önermelerinizi oluşturunuz.



5. Oluşturduğunuz önermeler yardımıyla aşağıda verilen problemi çözünüz. Önermelerin problemin çözümünde ne tür kolaylıklar sağladığını ve başka hangi problem durumlarında kullanılabileceğini yazınız.

Dünyanın en ağır kitaplarından birisinin kütlesi 8 kg ile 9 kg arasındadır. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Kitabın kütlesi (kg) doğal sayı veya tam sayı olabilir mi? Nedenleriyle açıklayınız.

b) Kitabın kütlesi (kg) rasyonel sayı veya gerçek sayı olarak ifade edilebilir mi? Nedenleriyle açıklayınız.

c) Kitabın kütlesinin (kg) bazı sayı kümeleri ile ifade edilip bazı sayı kümeleri ile ifade edilememesi bu sayı kümelerinin hangi özelliği ile ilişkilidir?

6. Oluşturduğunuz önermeleri matematiksel olarak doğrulayınız ve doğrulama yöntemlerinizi kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

Karşıt örnek sunma bir genellemenin tüm durumlar için geçerli olmadığını kanıtlamak için kullanılan matematiksel bir yöntemdir. Bir önermenin yanlış olduğunu göstermek amacıyla bu önermeye uymayan tek bir örnek bulmak yeterlidir.

Kontrol Noktası 

- Doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve gerçek sayılar kümeleri sıralı kümelerdir.
- Ardışık iki doğal sayı arasında herhangi bir doğal sayı yer almaz.
- Ardışık iki tam sayı arasında herhangi bir tam sayı yer almaz.
- $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ kümelerinde arada olma özelliği yoktur.
- Herhangi iki rasyonel sayı arasında istenen sayıda rasyonel sayı bulunabilir.
- Herhangi iki gerçek sayı arasında istenen sayıda gerçek sayı bulunabilir.
- $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinde arada olma özelliği vardır.

Sayı Kümelerinin Dört İşleme Göre Kapalılığı

Bir sayı kümesinde yapılan işlemler (toplama, çıkarma, çarpma ve bölme) sonucunda elde edilen değerlerin yine o küme içinde kalması, algoritmalar ve formüllerin geliştirilmesi sırasında tutarlılık ve işlevsellik sağlar. Bu durum, sayı kümeleriyle ilgili işlemlerin yapısal özelliklerinin anlaşılmasında önemli bir role sahip olup çeşitli matematiksel yapıların temelini oluşturmaktadır.

Bir kümedeki herhangi iki eleman bir işleme girdiğinde elde edilen sonuç yine aynı kümenin elemanı ise bu **küme o işleme göre kapalıdır**.

18. Uygulama



Sayı Kümelerinin Dört İşleme Göre Kapalılığını İnceleme

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}-\{0\}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}-\{0\}$ kümelerinden alınan herhangi iki eleman ile yapılan bir işlemin (toplama, çıkarma, çarpma ve bölme) sonucunun aynı kümenin elemanı olup olmaması durumuyla ilgili varsayımlarınızı oluşturunuz.

2. Tabloda verilen her bir küme için bu kümeye ait herhangi iki eleman seçiniz. Seçtiğiniz elemanlarla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini yaparak tabloyu örnekteki gibi doldurunuz. Bulduğunuz sonuçların yine aynı kümenin elemanı olup olmadığını inceleyiniz.

Küme	Elemanlar	Toplama	Çıkarma	Çarpma	Bölme
$\mathbb{N}$	4 ve 7	$4+7=11\in\mathbb{N}$	$4-7=-3\notin\mathbb{N}$	$4\cdot7=28\in\mathbb{N}$	$\frac{1}{2}=0,5\notin\mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$					
$\mathbb{Q}$					
$\mathbb{Q}-\{0\}$					
$\mathbb{R}$					
$\mathbb{R}-\{0\}$					

3. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}-\{0\}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}-\{0\}$ kümelerinin kapalılık özelliği ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

4. Varsayımlarınızla genellemelerinizi karşılaştırarak $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}-\{0\}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}-\{0\}$ kümelerinin kapalılık özelliğine dair önermelerinizi oluşturunuz.

5. Oluşturduğunuz önermeler yardımıyla aşağıda verilen problemi çözünüz. Önermelerin problemin çözümünde ne tür kolaylıklar sağladığını ve başka hangi problem durumlarında kullanılabileceğini yazınız.

Gerçek sayıların alt kümesi olan bir A kümesi oluşturunuz. A kümesinin toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerine göre kapalı olup olmadığını inceleyiniz.

6. Oluşturduğunuz önermeleri matematiksel olarak doğrulayınız ve doğrulama yöntemlerinizi kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

20. ÖRNEK

İrrasyonel sayılar kümesinin çarpma işlemine göre kapalı olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm

İrrasyonel sayılar kümesinin çarpma işlemine göre kapalı olmadığı karşıt örnek sunularak gösterilebilir. $\sqrt{3}, \sqrt{12} \in \mathbb{Q}'$ için $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{36}=6\notin\mathbb{Q}'$ olur. Böylece aksine örnek verme yöntemi ile doğrulama yapılmış olur.

Bu durumda bazı $a, b \in \mathbb{Q}'$ için $a\cdot b\notin\mathbb{Q}'$ olduğundan $\mathbb{Q}'$ kümesi çarpma işlemine göre kapalı değildir.

14. Sıra Sizde

İrrasyonel sayılar kümesinin bölme işlemine göre kapalı olup olmadığını gösteriniz.

21. ÖRNEK

$A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin dört işleme göre kapalı olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm

A kümesinin herhangi iki elemanı x_1 ve x_2 olsun. $x_1 = 2a$ ve $x_2 = 2b$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ vardır.

$x_1 + x_2 = 2a + 2b = 2(a + b) \in A$ olur.

$x_1 - x_2 = 2a - 2b = 2(a - b) \in A$ olur.

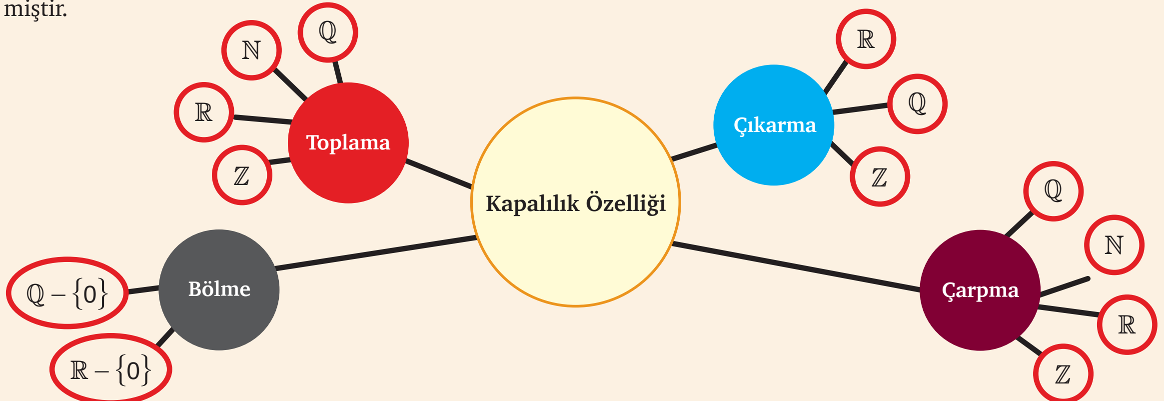
$x_1 \cdot x_2 = 2a \cdot 2b = 4ab \in A$ olur.

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$ olur. $\frac{x_1}{x_2}$ ifadesi bazı $a, b \in \mathbb{Z}$ için A kümesinin elemanı olmaz. Bu durum, karşıt örnek sunularak da gösterilebilir. $a = 1$ ve $b = 3$ seçilirse $\frac{x_1}{x_2} = \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \notin A$ elde edilir.

Bu durumda A kümesi toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır; bölme işlemine göre kapalı değildir. Aksine örnek verme yöntemi hipotezin doğru olmadığını gösterirken matematiksel olarak kolaylık sağlamaktadır.

Kontrol Noktası 

Aşağıdaki bilgi görselinde $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}-\{0\}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}-\{0\}$ kümelerinin hangi işlemlere göre kapalı olduğu verilmiştir.





Alıştırmalar

1. Bir yüzme yarışmasında farklı yaş gruplarında en hızlı yüzen üç yüzücünün kronometre ile elde edilen yarışı tamamlama süreleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Yaş Aralığı	Yüzücüler	Yarışı Tamamlama Süreleri (sn.)
18-25	Barış	57,32
	Ayşe	57,38
	Azra	57,67
26-35	Batuhan	58,15
	Elif	58,59
	Özlem	58,02
36-45	Uğur	57,88
	Engin	59,75
	Esra	59,43

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) 18-25 yaş aralığındaki yüzücülerden birinci olanı belirlemek için gerçek sayılarda sıralamanın özelliklerinden hangisinin kullanılabileceğini bulunuz.

b) 18-25 yaş aralığındaki yüzücülerin her biri yarışı ikişer saniye geç tamamlasaydı sıralama değişir miydi? Bu durum gerçek sayılarda sıralamanın hangi özelliği ile açıklanabilir?

c) 26-35 yaş aralığındaki yüzücülerin dereceleri arasında sadece saniyeler dikkate alınsaydı sıralamanın nasıl değişeceğini açıklayınız.

ç) 36-45 yaş aralığındaki yüzücülerin dereceleri yardımıyla "$a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$" özelliğini doğrulayınız. Doğrulama sırasında 1, 2 ve 3. olan sporcuların derecelerinin cebirsel temsillerinin yapılıp yapılamayacağını açıklayınız.

2. Herhangi iki farklı irrasyonel sayının arasında yer alan beş tane irrasyonel sayı bulunuz. Bulduğunuz sayıların arasında başka irrasyonel sayılar olup olmadığını inceleyiniz.

3. $A = \{x \mid x = 2 \cdot k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin dört işleme göre kapalı olup olmadığını inceleyiniz.

Konu ile ilgili çalışma kâğıdına ulaşmak için karekodu okutunuz.



1.4. GERÇEK SAYILARIN İŞLEM ÖZELLİKLERİ

Konuya Başlarken 



Adil öğretmen ve öğrencileri arasında aşağıdaki konuşmalar geçiyor.

Öğretmen: Çocuklar nüfus yoğunluğu nedir?

Ali: Nüfus yoğunluğu, birim alan başına düşen kişi sayısıdır.

Öğretmen: Doğru. Peki, bir bölgenin nüfus yoğunluğunu hesaplayabilmek için hangi bilgilere ihtiyacımız vardır?

Pelin: Bir bölgenin nüfus yoğunluğunu hesaplayabilmek için o bölgenin yüz ölçümünün kaç km^2 olduğunu bilmek yeterlidir.

Öğretmen: Bir bölgenin nüfus yoğunluğunu hesaplayabilmek için sadece yüz ölçümü bilgisi yeterli değildir. Başka cevap vermek isteyen arkadaşınız var mı?

Selcan: Bir bölgenin nüfus yoğunluğunu hesaplayabilmek için o bölgenin yüz ölçümünü ve o bölgede yaşayan kişi sayısını bilmek gerekir.

Öğretmen: Evet, doğru. Bir bölgenin nüfus yoğunluğu, bölgede yaşayan kişi sayısının bölgenin yüz ölçümüne oranıdır.

Buna göre aşağıdaki sorularla ilgili fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

1. Adil öğretmen ve öğrencileri arasında geçen konuşmadaki cümleleri inceleyiniz. Kesin doğru ya da kesin yanlış şeklinde karara varılabilen cümleler hangileridir?

2. Çevrenizdeki kişilerin kullandığı cümlelere dikkat ediniz. Doğru ya da yanlış hüküm bildiren cümleleri belirleyiniz.

Matematikte kavramlar, kavramlara ait özellikler, işlemlerden elde edilen sonuçlar sözel veya sembolik olarak ifade edilebilir. Bu ifadelerden bazıları kesin doğru ya da kesin yanlış bir hüküm bildirir. Kesin doğru ya da kesin yanlış bir hüküm bildiren matematiksel örnekler veriniz.

19. Uygulama



Önerme Kavramı

Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Aşağıdaki tabloda bazı matematiksel ifadeler verilmiştir. Verilen ifadelerin doğru veya yanlış olma durumlarını belirleyerek tabloyu doldurunuz.

İfadeler	Doğru	Yanlış	Doğru ya da Yanlış Olduğu Belirlenemez
Tabanları eşit olan üslü gösterimi verilen sayılar çarpılırken ortak taban aynen yazılır, üsler toplanır.	✓		
$\sqrt[3]{x} = 5$ olduğuna göre x kaçtır?			✓
-1 sayısının 12. kuvveti kendisine eşittir.			
Doğal sayılar kümesi, gerçek sayılar kümesinin bir alt kümesidir.			
2 ve 4 arasındaki (2 ve 4 dâhil) gerçek sayılar kümesi ile 1 ve 2 arasındaki gerçek sayılar kümesinin ortak elemanlarının oluşturduğu küme boş kümedir.			

2. Tabloda sözel olarak verilen "Tabanları eşit olan üslü ifadeler çarpılırken ortak taban aynen yazılır, üsler toplanır." ifadesi, uygun matematiksel semboller kullanılarak "$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$" biçiminde de yazılabilir.

Tabloda sözel olarak verilen ifadeleri sembol kullanarak, sembolik olarak verilen ifadeleri sözel olarak yazınız. Hangi gösterimlerin daha kullanışlı olduğunu tartışınız.

3. Kesin doğru ya da kesin yanlış olan farklı ifadeler oluşturunuz. Bulduğunuz ifadeleri hem sözel olarak hem de semboller kullanarak ifade ediniz.

Kesin doğru ya da kesin yanlış bir hüküm bildiren ifadelere **önerme** denir. Önermeler sözel veya sembolik dille ifade edilebilir.

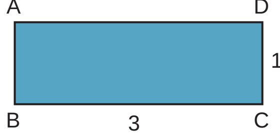
20. Uygulama



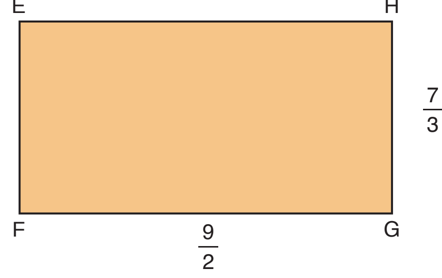
Çevre Uzunluğu Hesabı

Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

Esin öğretmen, tahtaya iki dikdörtgen çizmiştir. Şekil 1'deki ABCD dikdörtgeninin kenar uzunluklarını tam sayı, Şekil 2'deki EFGH dikdörtgeninin kenar uzunluklarını rasyonel sayı olarak vermiştir. Öğrencilerinden dikdörtgenlerin çevre uzunluklarını hesaplamalarını istemiştir.



Şekil 1



Şekil 2

1. Tabloda doğru cevaba ulaşan bazı öğrencilerin işlem adımları verilmiştir. İşlem adımlarından yararlanarak a uzun kenar uzunluğu, b kısa kenar uzunluğu olmak üzere çevre uzunluğunu veren ifadelerin cebirsel temsillerini örnekteki gibi bulunuz.

Öğrenci	Ç (ABCD)	Ç (EFGH)	Cebirsel Temsili
Cemre	$2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 8$ cm	$2 \cdot \frac{9}{2} + 2 \cdot \frac{7}{3} = \frac{41}{3}$ cm	2a + 2b
Ali	$2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 8$ cm	$2 \cdot \frac{7}{3} + 2 \cdot \frac{9}{2} = \frac{41}{3}$ cm	
Elif	$2 \cdot (3 + 1) = 2 \cdot 4 = 8$ cm	$2 \cdot \left(\frac{9}{2} + \frac{7}{3}\right) = 2 \cdot \frac{41}{6} = \frac{41}{3}$ cm	
Hasan	$(3 + 1) \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$ cm	$\left(\frac{9}{2} + \frac{7}{3}\right) \cdot 2 = \frac{41}{6} \cdot 2 = \frac{41}{3}$ cm	

2. Tabloda bulduğunuz cebirsel temsilleri karşılaştırınız. Elde ettiğiniz cebirsel temsiller birbirine eşit midir?

3. Cebirsel temsiller arasındaki ilişki, tam sayılarda ve rasyonel sayılarda toplama veya çarpma işlemlerinin özelliklerinden (değişme, birleşme, dağılma, etkisiz eleman, ters eleman, yutan eleman) hangileriyle ilişkilendirilebilir? Gerekçelerinizi sınıfta arkadaşlarınızla saygı ve nezaket çerçevesinde tartışarak fikirlerinizi paylaşınız.

4. Dikdörtgenlerin kenar uzunlukları $a = 4\sqrt{2}$ cm ve $b = 3\sqrt{2}$ cm olarak seçildiğinde tam sayılarda ve rasyonel sayılarda dört işlemin hangi özellikleri (değişme, birleşme, dağılma, etkisiz eleman, ters eleman, yutan eleman) gözlemlenebilir? Açıklayınız.

21. Uygulama



Sayı Kümelerinin İşlem Özellikleri

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. **a)** Tablo 1'de verilen toplama ve çarpma işlemlerinin sonuçlarını bulunuz.

Tablo 1

Toplama İşlemi		Çarpma İşlemi	
$3\sqrt{5}+(-\sqrt{5})=$	$(-\sqrt{5})+3\sqrt{5}=$	$3\sqrt{5}\cdot(-\sqrt{5})=$	$(-\sqrt{5})\cdot 3\sqrt{5}=$
$\frac{1}{2}+(-3)=$	$(-3)+\frac{1}{2}=$	$\frac{1}{3}\cdot(-2)=$	$(-2)\cdot\frac{1}{3}=$
$(-2\sqrt{6})+(-3\sqrt{6})=$	$(-3\sqrt{6})+(-2\sqrt{6})=$	$(-2\sqrt{6})\cdot(-\sqrt{2})=$	$(-\sqrt{2})\cdot(-2\sqrt{6})=$

b) Aynı satırdaki işlemlerde toplanan veya çarpılan sayıların yerlerinin değişmesi, sonuçları değiştirmiş midir? Açıklayınız.

2. **a)** Tablo 2'de verilen toplama ve çarpma işlemlerinin sonuçlarını bulunuz.

Tablo 2

Toplama İşlemi		Çarpma İşlemi	
$3\sqrt{5}+(\sqrt{5}+2\sqrt{5})=$	$(3\sqrt{5}+\sqrt{5})+2\sqrt{5}=$	$3\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5})=$	$(3\sqrt{5}\cdot\sqrt{5})\cdot 2\sqrt{5}=$
$2,1+[3,6+(-2,5)]=$	$(2,1+3,6)+(-2,5)=$	$2,5\cdot(0,5\cdot 4)=$	$(2,5\cdot 0,5)\cdot 4=$

b) Aynı satırdaki işlemlerde işlem sırasının değişmesi, sonuçları değiştirmiş midir? Açıklayınız.

3. **a)** Tablo 3'te verilen toplama ve çarpma işlemlerinde verilmeyen sayıları bulunuz.

Tablo 3

Toplama İşlemi		Çarpma İşlemi	
$3\sqrt{5}+....=3\sqrt{5}$	$....+3\sqrt{5}=3\sqrt{5}$	$(-\sqrt{7})\cdot ....=-\sqrt{7}$	$....\cdot(-\sqrt{7})=-\sqrt{7}$
$(-2,4)+....=-2,4$	$....+(-2,4)=-2,4$	$\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot ....=-\frac{1}{3}$	$....\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}$
$a\in\mathbb{R}, a+....=a$	$a\in\mathbb{R}, ...+a=a$	$a\in\mathbb{R}, a\cdot ....=a$	$a\in\mathbb{R}, ...\cdot a=a$

b) Bulduğunuz sonuçlardan hareketle verilen işlemler, toplama ve çarpmanın hangi özelliği ile ilişkilendirilebilir? Açıklayınız.



4. **a)** Tablo 4'te verilen toplama ve çarpma işlemlerinin sonuçlarını bulunuz.

Tablo 4

Toplama İşlemi		Çarpma İşlemi	
$\sqrt{5}+(-\sqrt{5})=$	$(-\sqrt{5})+\sqrt{5}=$	$\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=$	$\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}=$
$(-2{,}4)+2{,}4=$	$2{,}4+(-2{,}4)=$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)=$	$\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)=$
$a\in\mathbb{R},\ a+(-a)=$	$a\in\mathbb{R},\ (-a)+a=$	$a\in\mathbb{R}-\{0\},\ \frac{1}{a}\cdot a=$	$a\in\mathbb{R}-\{0\},\ a\cdot\frac{1}{a}=$

b) Tablo 4'te elde edilen sonuçlara göre toplanan veya çarpılan gerçek sayıların aralarında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayınız.

5. **a)** Tablo 5'teki çarpma işlemlerinde sonuçları ve verilmeyen sayıları bulunuz.

Tablo 5

Çarpma İşlemi			
$\frac{1}{2}\cdot 0=$	$0\cdot\frac{1}{2}=$	$\sqrt{5}\cdot 0=$	$0\cdot\sqrt{5}=$
$(-2{,}4)\cdot 0=$	$0\cdot(-2{,}4)=$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\cdot 0=$	$0\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)=$
$a\in\mathbb{R},\ a\cdot \ldots.=0$	$a\in\mathbb{R},\ \ldots.\cdot a=0$	$a\in\mathbb{R},\ \ldots.\cdot\frac{2a}{5}=0$	$a\in\mathbb{R},\ \frac{2a}{5}\cdot\ldots.=0$

b) Tablo 5'teki işlemler ve elde edilen sonuçlar, çarpma işleminin hangi özelliği ile ilişkilendirilebilir? Açıklayınız.

6. **a)** Gerçek sayılar kümesinden m ve n gibi iki farklı sayı seçerek aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

Tablo 6

	1. Sütun		2. Sütun
1. Satır	m =	n =	$3\cdot(m+n)=$ $3m+3n=$
2. Satır	m =	n =	$(3m-n)\cdot 2=$ $6m-2n=$

b) Tablo 6'nın 2. sütununda elde ettiğiniz işlemlerin sonuçlarını her satırı kendi içinde olacak şekilde karşılaştırınız.

7. Gözlemlerinizden yararlanarak gerçek sayılarda hangi işlem özellikleri (değişme, birleşme, dağılma, ters eleman, birim eleman, etkisiz eleman, yutan eleman) vardır? Tam sayılar ve rasyonel sayılarda dört işlem özelliklerini dikkate alarak gerçek sayılarda dört işlem özelliklerini sözel olarak ifade ediniz.

8. Sözel olarak ifade ettiğiniz önermeleri cebirsel olarak gösteriniz.

9. Elde ettiğiniz özelliklerden yararlanarak iki cebirsel ifadenin çarpımının sıfıra eşit olması durumunda çarpılan cebirsel ifadelerle ilgili çıkarımınızı örnek vererek açıklayınız.

10. Gerçek sayılarda çıkarma ve bölme işlemlerinin sahip olduğu ya da olmadığı işlem özelliklerini örnekteki gibi belirleyiniz.

Matematikte Sembolik Dil

Gerçek sayılarda işlem özelliklerini ifade eden önermeler, sembolik dil kullanılarak yazılabilir. Matematikte sembolik dilin kullanılmasının nedeni ne olabilir? Matematikte sembol kullanmanın sağladığı avantajlar nelerdir?

“Her a gerçek sayısı sıfırla çarpıldığında sonuç sıfırdır.”, “Bazı b gerçek sayıları $\frac{a}{b}$ ifadesini tanımsız yapar.” önermeleri matematiksel olarak nasıl ifade edilebilir? Matematiksel ifadeler arasında yer alan niceleyicilerin (her, bazı), mantık bağlaçlarının (ve, veya, ya da, ise, ancak ve ancak) sembolleri Tablo 1.1’de verilmiştir.

Tablo 1.1: *Matematiksel Sembollerin Anlamları*

	Niceleyiciler		Mantık Bağlaçları				
Sembol	$\exists$	$\forall$	$\wedge$	$\vee$	$\veebar$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
Anlamı	bazı (En az bir)	her	ve	veya	ya da	ise	ancak ve ancak

İki veya daha fazla önermeyi birlikte ifade edebilmek için mantık bağlaçlarından faydalanılır.

22. Uygulama

Önermelerin Sembolik Dille İfade Edilmesi

Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

Gerçek sayılarda bazı işlemlerle ilgili sözel önermeler aşağıda verilmiştir.

1. a) Her a, b gerçek sayısı için a, b den büyükse a nın b den çıkarılmasıyla elde edilen değer sıfırdan büyüktür.

b) Sıfırdan farklı her a gerçek sayısı için a ile b sayısının çarpımının 1 olmasını sağlayan en az bir b gerçek sayısı vardır.

c) a ile b gerçek sayı olmak üzere a ile b nin çarpım sonucu, ancak ve ancak a veya b sayıları sıfıra eşitse sıfırdır.

ç) a gerçek sayısı sıfıra eşit veya sıfırdan küçükse ve sıfıra eşit veya sıfırdan büyükse a sıfıra eşittir.

d) İki gerçek sayının çarpımının sıfırdan farklı olması için ancak ve ancak çarpanlarının ikisinin de sıfırdan farklı olması gerekmektedir.

e) a ve b gerçek sayılarının çarpımlarının değeri negatifse a ya da b negatiftir.

Yukarıdaki önermelerde kullanılan mantık bağlaçlarını ve niceleyicileri belirleyiniz. Verilen cümle içindeki anlamlarına dair fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

2. Aşağıda sembolik dil kullanılarak verilen önermeleri inceleyiniz. 1. maddede verilen sözel önermelerin karşılıkları aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri olabilir? Gerekçeleriyle açıklayınız.

f) $\forall a,b \in \mathbb{R}$ için $a > b \Rightarrow b - a > 0$'dır.

g) $\exists a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ için $\forall b \in \mathbb{R}$ vardır. Öyle ki $a \cdot b = 1$'dir.

ğ) $a \in \mathbb{R}$ için $a \leq 0 \wedge a \geq 0 \Rightarrow a = 0$'dır.

h) $a, b \in \mathbb{R}$ için $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$'dır.

ı) $\forall a,b \in \mathbb{R}$ için $a < b \vee a - b < 0$'dır.

i) $a,b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a \cdot b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \wedge b \neq 0$'dır.

j) $a,b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a \cdot b < 0 \Rightarrow a < 0 \veebar b < 0$'dır.

k) $\forall a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ için $\exists b \in \mathbb{R}$ vardır. Öyle ki $a \cdot b = 1$'dir.

3. Elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak sembolik dille farklı matematiksel önermeler yazınız. Yazdığınız önermelerin sözel karşılıklarını bulunuz. Hangi gösterimlerin daha kullanışlı olduğuna dair fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

Kontrol Noktası



Gerçek Sayılarda İşlem Özellikleri

- **Değişme özelliği:** $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a + b = b + a$ ve $a \cdot b = b \cdot a$ olur.

- **Birleşme özelliği:** $\forall a,b \in R$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$ ve $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ olur.

- **Birim eleman:** $\forall a \in \mathbb{R}$ için $a + 0 = 0 + a = a$ ve $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ olur.

  Toplama işleminin **birim elemanı 0** ve çarpma işleminin **birim elemanı 1**'dir.

- **Ters eleman:** $\forall a \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ için

  $a + (-a) = (-a) + a = 0$ olduğundan **a nın toplama işlemine göre tersi –a** olur.

  $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ olduğundan **a nın çarpma işlemine göre tersi** $\frac{1}{a} = a^{-1}$ olur.

- **Yutan eleman:** $\forall a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ olduğundan çarpma işleminin **yutan elemanı 0**'dır.

- **Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği:** $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ için

  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ olur.

  Çarpma işleminin çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ için

  $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ ve $(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$ olur.

- Gerçek sayılarda toplama, çıkarma ve bölme işlemlerinin **yutan elemanı** yoktur.

- Gerçek sayılarda çıkarma ve bölme işlemlerinin **değişme** özelliği, **birleşme** özelliği, **birim elemanı** ve **ters elemanı** yoktur.

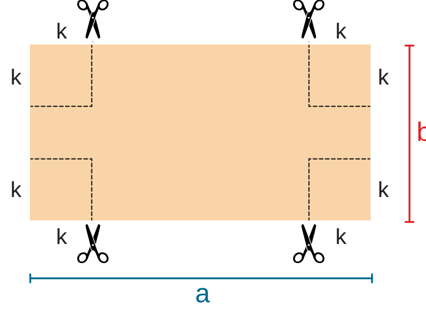
23. Uygulama



İki Gerçek Sayının Farklı Gösterimlerinin ve İki Farklı Cebirsel İfadenin Birbirine Eşitliğini İnceleme

Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

Aşağıda kenar uzunlukları a cm ve b cm olan dikdörtgen şeklinde bir karton verilmiştir. Bu dikdörtgenin her köşesinden bir kenar uzunluğu k cm olan kare parçalar kesilerek çıkartılmıştır.



1. a) Dikdörtgenin kesilmeden önceki çevre uzunluğunu a ve b değerlerine bağlı olarak yazınız.

b) Dikdörtgen kesildikten sonra oluşan şeklin çevre uzunluğunu a, b ve k değerlerine bağlı olarak yazınız.

c) Bulduğunuz cebirsel ifadelerin birbirine eşit olup olmadığını belirleyiniz.

2. a) a, b ve k değişkenlerine $k < b < a$ olacak şekilde pozitif gerçek sayı değerleri veriniz.

b) Dikdörtgenin kesilmeden önceki çevre uzunluğu ile kesildikten sonraki çevre uzunluğunu hesaplayınız.

c) Bulduğunuz çevre uzunlukları değerlerinin birbirine eşit olup olmadığını belirleyiniz.

24. Uygulama

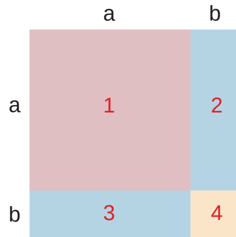


Özdeşliklerin Cebirsel ve Geometrik Temsilleri

Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. a) a, b birer pozitif gerçek sayı ve $b < a$ olmak üzere $(a + b)^2$ ifadesinin eşitini gerçek sayılarda işlem özelliklerini kullanarak bulunuz.

b) Aşağıda bir kenar uzunluğu (a + b) birim olan kare verilmiştir. Kare 1, 2, 3, 4 numaralı dört bölüme ayrılmıştır.



1: Bir kenar uzunluğu a birim olan kare

2: Kısa kenar uzunluğu b birim, uzun kenar uzunluğu a birim olan dikdörtgen

3: Kısa kenar uzunluğu b birim, uzun kenar uzunluğu a birim olan dikdörtgen

4: Bir kenar uzunluğu b birim olan kare

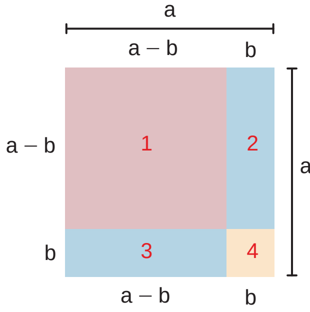
1, 2, 3, 4 numaralı bölümlerin alanlarını cebirsel olarak ifade ediniz.



c) Bulduğunuz cebirsel ifadeleri kullanarak a şıkkında elde ettiğiniz eşitliği doğrulayınız.

2. a) a, b birer pozitif gerçek sayı ve $b < a$ olmak üzere $(a - b)^2$ ifadesinin eşitini gerçek sayılarda işlem özelliklerini kullanarak bulunuz.

b) Aşağıda bir kenar uzunluğu a birim olan kare verilmiştir. Kare 1, 2, 3, 4 numaralı dört bölüme ayrılmıştır.



1: Bir kenar uzunluğu (a – b) birim olan kare

2: Kısa kenar uzunluğu b birim, uzun kenar uzunluğu (a – b) birim olan dikdörtgen

3: Kısa kenar uzunluğu b birim, uzun kenar uzunluğu (a – b) birim olan dikdörtgen

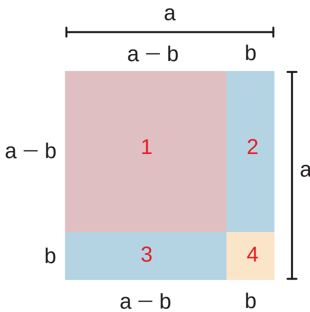
4: Bir kenar uzunluğu b birim olan kare

1, 2, 3, 4 numaralı bölümlerin alanlarını cebirsel olarak ifade ediniz.

c) Bulduğunuz cebirsel ifadeleri kullanarak a şıkkında elde ettiğiniz eşitliği doğrulayınız.

3. a) a, b birer pozitif gerçek sayı ve $b < a$ olmak üzere $(a - b) \cdot (a + b)$ ifadesinin eşitini gerçek sayılarda işlem özelliklerini kullanarak bulunuz.

b) Aşağıda bir kenar uzunluğu a birim olan kare verilmiştir. Kare 1, 2, 3, 4 numaralı dört bölüme ayrılmıştır.



1: Bir kenar uzunluğu (a – b) birim olan kare

2: Kısa kenar uzunluğu b birim, uzun kenar uzunluğu (a – b) birim olan dikdörtgen

3: Kısa kenar uzunluğu b birim, uzun kenar uzunluğu (a – b) birim olan dikdörtgen

4: Bir kenar uzunluğu b birim olan kare

1, 2, 3, 4 numaralı bölümlerin alanlarını cebirsel olarak ifade ediniz.

c) Bulduğunuz cebirsel ifadeleri kullanarak a şıkkında elde ettiğiniz eşitliği doğrulayınız.

Cebirsel ifadelerdeki değişkenlerin alacağı tüm gerçek sayı değerleri için sağlanan eşitliklere **özdeşlik** denir. Aşağıda bazı özdeşlikler verilmiştir.

İki terimin toplamının karesi özdeşliği: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

İki terimin farkının karesi özdeşliği: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

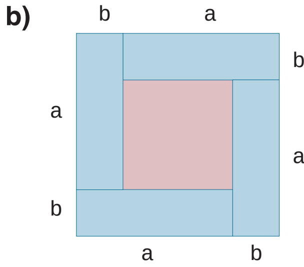
İki terimin karelerinin farkı özdeşliği: $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$

15. Sıra Sizde

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ özdeşliği veriliyor. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Bu özdeşliğin doğruluğunu cebirsel olarak gösteriniz.

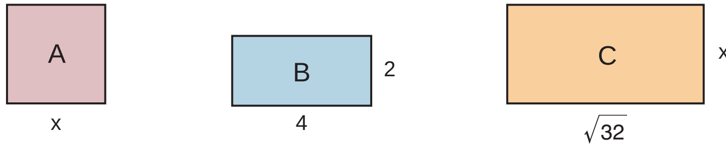
b)



Yanda bir kenar uzunluğu, $(a+b)$ birim olan kare verilmiştir. Bu kare, 4 eş dikdörtgen ve 1 kare olacak şekilde beş parçaya ayrılmıştır.

Yukarıda verilen özdeşliğin doğruluğunu geometrik temsiller yardımıyla gösteriniz.

22. ÖRNEK



Yukarıda bir kenar uzunluğu x cm ve alanı A cm^2 olan bir kare ile alanları B cm^2 ve C cm^2, kenar uzunlukları sırasıyla 2 ve 4 cm, x ve $\sqrt{32}$ cm olan iki dikdörtgen verilmiştir. $A + B = C$ olduğuna göre x in kaç cm olduğunu bulunuz.

Çözüm

$A = x\cdot x = x^2\ cm^2$, $B = 2\cdot 4 = 8\ cm^2$ ve $C = \sqrt{32}\cdot x = \sqrt{16\cdot 2}\cdot x = 4\sqrt{2}\cdot x\ cm^2$ bulunur.

$A + B = C$ olduğundan $x^2 + 8 = 4\sqrt{2}\cdot x \Rightarrow x^2 - 4\sqrt{2}\cdot x + 8 = 0$ bulunur.

Eşitliğin sol tarafı x ve $2\sqrt{2}$ terimlerinin farkının karesinin açılımıdır.

Buradan $x^2 - 4\sqrt{2}\cdot x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot x + (2\sqrt{2})^2 = 0 \Rightarrow (x - 2\sqrt{2})\cdot(x - 2\sqrt{2}) = 0$ olur. Çarpımın sonucu sıfırsa çarpılan iki ifadeden en az biri sıfıra eşit olur. Buradan $x - 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$ cm olur.

25. Uygulama



Bahçe Düzeni

Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

Deniz Hanım; bir kenar uzunluğu 15,75 m olan kare şeklindeki bahçesinin zemininin bir kısmını seramikle, bir kısmını hazır çimle kaplatacaktır. Deniz Hanım, seramikle kaplanacak bölümün kare şeklinde olmasını istemektedir. Bahçenin iki farklı düzenine göre alınan fiyat teklifleri tabloda verilmiştir.

	1. Teklif	2. Teklif
Çim ve Seramik Kaplanacak Alan	14,25 m; 15,75 m	11,25 m; 15,75 m
Çim Kaplama Ücreti	8100 TL	19 440 TL

Deniz Hanım, iki fiyat teklifi için 1 m^2 çim kaplama ücretini karşılaştıracaktır. 1 m^2 çim kaplama ücretinin daha düşük olduğu teklifi tercih edecektir.

1. Her iki teklif için çim kaplanacak alanı nasıl hesaplarsınız? Yönteminizi açıklayınız.

2. Çim kaplanacak alanları bulurken işlemlerinizi kolaylaştıracak stratejileri belirleyiniz.

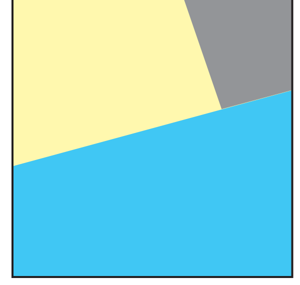
3. Belirlediğiniz stratejileri kullanarak çim kaplanacak alanları hesaplayınız.

4. 1. fiyat teklifi için 1 m^2 çim kaplama ücreti x Türk lirası, 2. fiyat teklifi için 1 m^2 çim kaplama ücreti y Türk lirası olsun. İki durum için çim kaplama ücretini veren cebirsel ifadeleri yazınız.

5. Oluşturduğunuz cebirsel ifadeler yardımıyla iki fiyat teklifi için 1 m^2 çim kaplama ücretlerini bularak Deniz Hanım'ın seçeceği teklifi yazınız.

23. ÖRNEK

Kare şeklindeki bir tuval, yandaki gibi üç farklı renge boyanmıştır. Gri renkli bölgenin alanı $\frac{4}{9}$ dm^2, mavi renkli bölgenin alanı $\frac{10}{9}$ dm^2 ve sarı renkli bölgenin alanı $\frac{25}{36}$ dm^2 dir. Bu tuval için seçilecek bir çerçevenin bir kenar uzunluğunun en az kaç dm olması gerektiğini bulunuz.



Çözüm

Kare tuvalin bir kenar uzunluğu $\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{10}{9}+\frac{25}{36}}$ dm'dir. Kökün içindeki sayılar incelendiğinde $\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\frac{25}{36}=\left(\frac{5}{6}\right)^2$ ve $\frac{10}{9}=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}$ olduğu görülür. Buradan kökün içi $\frac{2}{3}$ ve $\frac{5}{6}$ sayılarının toplamının karesinin özdeşi olduğundan $\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{10}{9}+\frac{25}{36}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)^2}=\left|\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right|=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$ bulunur. Tuval için seçilecek çerçevenin bir kenar uzunluğu, en az $\frac{3}{2}$ dm olmalıdır.



26. Uygulama

a, b $\in$ R$^+$ ve b < a Olmak Üzere $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$ ve $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ Biçimindeki Köklü Gösterimler

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Tabloda kenar uzunlukları gerçek sayı olan karelerin bir kenar uzunluğu, alanı ve bir kenar uzunluğunun farklı gösterimi verilmiştir. Verilmeyen ifadeleri bularak tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

Karenin Bir Kenar Uzunluğu (cm)	Karenin Alanı (cm^2)	Karenin Bir Kenar Uzunluğunun Farklı Gösterimi (cm)
$\sqrt{3}+\sqrt{2}$	$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{6}+2=5+2\sqrt{6}$	$\sqrt{5+2\sqrt{6}}$
$\sqrt{5+2\sqrt{6}}$	$5+2\sqrt{6}$	$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3+2+2\sqrt{3\cdot 2}}$ $=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}$ $=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$ $=\sqrt{3}+\sqrt{2}$
$\sqrt{5}+1$		
$\sqrt{6+2\sqrt{5}}$		
$\sqrt{6}-\sqrt{3}$		
$\sqrt{9-2\sqrt{18}}$		
$\sqrt{3}-1$		
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$		
$\sqrt{a}-\sqrt{b}$		

2. Karelerin bir kenar uzunluğunun iki farklı gösterimi arasındaki ilişkiyi belirleyiniz.

3. Elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $b < a$ olmak üzere $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$ ve $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ biçimindeki köklü gösterimlerin eşitlerini bularak özdeşlik biçiminde yazınız.

4. Bulduğunuz özdeşlikleri farklı gerçek sayılar için doğrulayınız.

5. Elde ettiğiniz özdeşlikleri karelerin alanlarından yararlanarak geometrik temsillerle gösteriniz.

24. ÖRNEK

Aşağıdaki köklü gösterimlerin eşitlerini bulunuz.

a) $\sqrt{12-2\sqrt{32}}$

b) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$

c) $\sqrt{14-\sqrt{180}}$

ç) $\sqrt{3+\sqrt{5}}$

Çözüm

a) $\sqrt{12-2\sqrt{32}} = \sqrt{8}-\sqrt{4} = 2\sqrt{2}-2$ olur.

$12 = 8+4$, $32 = 8 \cdot 4$

b) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ ifadesinde tamkare özdeşliğinden yararlanmak için içerideki köklü gösterimin katsayısının 2 olması gerekir. Köklü gösterimin katsayısı $4 = 2 \cdot 2$ şeklinde çarpanlarına ayrılarak çarpanlardan biri, kökün içine alınır. $\sqrt{9+2\sqrt{2^2 \cdot 5}} = \sqrt{9+2\sqrt{20}}$ elde edilir. Böylece

$\sqrt{9+2\sqrt{20}} = \sqrt{5}+\sqrt{4} = \sqrt{5}+2$ olur.

$9 = 5+4$, $20 = 5 \cdot 4$

c) $\sqrt{14-\sqrt{180}}$ ifadesinde tamkare özdeşliğinden yararlanmak için içerideki köklü gösterimin katsayısının 2 olması gerekir. Köklü gösterimin içindeki sayı $180 = 4 \cdot 45$ şeklinde çarpanlara ayrılarak 4, kökün dışına çıkarılır. Buradan $\sqrt{14-\sqrt{180}} = \sqrt{14-\sqrt{4 \cdot 45}} = \sqrt{14-2\sqrt{45}}$ elde edilir. Böylece

$\sqrt{14-2\sqrt{45}} = \sqrt{9}-\sqrt{5} = 3-\sqrt{5}$ olur.

$14 = 9+5$, $45 = 9 \cdot 5$



ç) $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ ifadesinde tamkare özdeşliğinden yararlanmak için içerideki köklü gösterimin katsayısının 2 olması gerekir. İçteki köklü gösterimden 2 elde edilemez. Bu sebeple ifade, $\sqrt{2}$ ile çarpılıp bölünür.

Buradan $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{\underset{(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$ olur.

16. Sıra Sizde

$\sqrt{9-\sqrt{80}} - \sqrt{9+\sqrt{80}}$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

Kontrol Noktası



$a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $a > b$ olsun.

- $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$
- $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$ şeklinde yazılabilir.

Özdeşliklerle ilgili animasyonu izlemek için karekodu okutunuz.



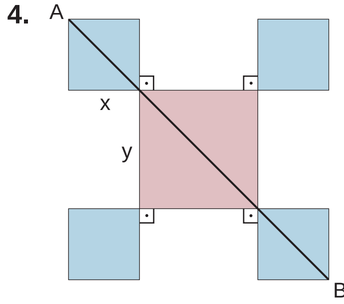
Alıştırmalar

1. **"a, b ve c gerçek sayılar olmak üzere b, a dan büyük ve c, b den büyük ise a, c den küçüktür." önermesini sembolik dille ifade ediniz.**

2. $\sqrt{4\sqrt{11+\sqrt{72}}-3}$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

3. $(3-1)\cdot(3-\sqrt{2})\cdot(3-\sqrt{3})\cdot(3-\sqrt{4})\cdot\ ...\ \cdot(3-\sqrt{30})$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

4.



Yandaki şekilde bir kenar uzunluğu x cm olan özdeş dört karenin birer köşesi, bir kenar uzunluğu y cm olan karenin köşeleri ile çakışıktır.

$|AB| = 7$ cm, $x \cdot y = \frac{3}{2}$ **olduğuna göre şeklin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.**

Konu ile ilgili çalışma kâğıdına ve bütüncül dereceli puanlama anahtarına ulaşmak için karekodu okutunuz.



Farklı Kaydet



Bu temada öğrendiğiniz bilgileri kendi hatırlayacağınız şekilde bu alana kısaca not edebilirsiniz.



Ölçme ve Değerlendirme

Bu bölümde cevaplamanız için farklı soru tiplerinde 13 adet soru bulunmaktadır.
Ölçme ve değerlendirme bölümünün sonunda verilen karekodu okutarak ek sorulara ulaşabilirsiniz.

1. Aşağıdaki tabloda bazı gök cisimlerinin kütleleri (kg) yaklaşık olarak verilmiştir.

Gök Cismi	Yaklaşık Kütlesi (kg)
Güneş	$1,99 \cdot 10^{30}$
Dünya	$5,97 \cdot 10^{24}$
Mars	$6,42 \cdot 10^{23}$
Satürn	$5,68 \cdot 10^{26}$
Ay	$7,34 \cdot 10^{22}$

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Dünya'nın kütlesinin Mars'ın kütlesinden kaç kg fazla olduğunu yaklaşık olarak bulunuz.

b) Dünya, Mars ve Ay'ın kütleleri toplamının kaç kg olduğunu yaklaşık olarak bulunuz.

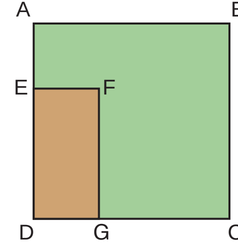
c) Güneş'in kütlesinin Dünya'nın kütlesinin kaç katı olduğunu yaklaşık olarak bulunuz.

ç) Gerçek oranlara sadık kalınarak yapılan bir Güneş sistemi maketinde Satürn modelinin kütlesi 5,68 kg'dır.

Bu makette Ay modelinin kütlesinin kaç kg olduğunu bulunuz.

2. Semih Bey, kare şeklindeki bahçesinin dikdörtgen şeklindeki bir bölümünü otopark olarak kullanmaktadır. Semih Bey'in bahçesi ABCD karesiyle, otopark bölümü EFGD dikdörtgeniyle modellenmiştir.

Bahçe ve otoparkla ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.



- Bahçenin alanı 108 m^2 dir.
- Otoparkın uzun kenarının uzunluğu, kısa kenarının uzunluğunun 2 katıdır.
- Bahçenin bir kenarının uzunluğu, otoparkın kısa kenar uzunluğunun 3 katıdır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Bahçenin çevre uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz.

b) Semih Bey, otoparkının zeminine metrekaresi 550 Türk lirası olan taşlardan döşetecektir.

Semih Bey'in bu işlem için kaç Türk lirası ödemesi gerektiğini bulunuz.

c) Semih Bey bahçesinin otopark dışında kalan bölümünü çitle çevirecektir.

Semih Bey'in bu işlem için alacağı çitin uzunluğunun hangi ardışık iki tam sayı arasında olduğunu metre cinsinden bulunuz.

3. A ve B şehirleri için mart ayında ölçülen sıcaklık değerleri ile ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- A şehrinde aylık ortalama sıcaklık değeri 12 °C'tur ve herhangi bir anda ölçülen sıcaklık değeri ortalamadan en fazla 8 °C sapma yapmaktadır.
- B şehrinde aylık ortalama sıcaklık değeri 7 °C'tur. En düşük sıcaklık –2 °C, en yüksek sıcaklık 16 °C olarak ölçülmüştür.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) A ve B şehirlerinde mart ayında ölçülebilecek sıcaklık değerlerini mutlak değerli eşitsizlik ve gerçek sayı aralığı biçiminde gösteriniz.

b) Mart ayında ölçülen bir sıcaklık değerinin hem A hem B şehrine ait olabileceği biliniyor.

Ölçülen sıcaklığın alabileceği değerleri gerçek sayı aralığı biçiminde, küme gösterimiyle ve sayı doğrusunda gösteriniz.

c) Mart ayında ölçülen bir sıcaklık değerinin A şehrine ait olup B şehrine ait olmadığı biliniyor.

Ölçülen sıcaklığın alabileceği değerleri gerçek sayı aralığı biçiminde, küme gösterimiyle ve sayı doğrusunda gösteriniz.

ç) Mart ayında ölçülen bir sıcaklık değerinin A veya B şehirlerine ait olduğu biliniyor.

Ölçülen sıcaklığın alabileceği değerleri gerçek sayı aralığı biçiminde, küme gösterimiyle ve sayı doğrusunda gösteriniz.

4. Aşağıdaki tabloda resmî futbol müsabakalarında kullanılacak topların standartlaşmış ölçülerinin hangi aralıklarda olması gerektiği verilmiştir.

Ölçüm	Alabileceği Değer
Çevre Uzunluğu	En az 68 cm, en fazla 70 cm
Kütlesi	En az 410 gr, en fazla 450 gr
İç Basıncı (Deniz Seviyesinde)	En az 0,6 atm, en fazla 1,1 atm

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Topun çevre uzunluğunun kaç cm olabileceğini gösteren aralığı mutlak değerli eşitsizlik olarak yazınız.

b) Topun kütlesinin kaç gr olmayacağını gösteren aralığı mutlak değerli eşitsizlik olarak yazınız.

c) Topun iç basıncının kaç atm olabileceğini gösteren aralığı mutlak değerli eşitsizlik olarak yazınız.

5. Evinde organik reçel yapan Zeynep Hanım, ev bütçesine katkı sağlamak için bu reçellerin satışını yapmak istemektedir. Bunun için piyasada satılan reçellerin 1 kilogramının fiyatlarını araştırmış ve tablodaki değerlere ulaşmıştır.

Reçel Fiyatları (TL)			
184	145	220	175
130	155	134	225

Zeynep Hanım, belirleyeceği fiyatın araştırdığı fiyatların ortalamasından en fazla 20 Türk lirası sapmasını istemektedir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Zeynep Hanım'ın satışını yapacağı 1 kg reçel fiyatının alacağı değerleri mutlak değerli eşitsizlik kullanarak gösteriniz.

b) 1 kg reçel fiyatının alacağı en büyük değer ile en küçük değeri bulunuz.

c) 1 kg reçel fiyatının alacağı değerleri sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

ç) Tablodaki fiyatlardan hangilerinin Zeynep Hanım'ın belirlediği fiyat aralığına dâhil olduğunu bulunuz.

6. 100 metre koşu yarışı gibi kısa mesafe yarışlarında sporcuların sıralamalarının daha hassas bir şekilde yapılması için saniyenin ondalık gösterimine ihtiyaç duyulur.

5 sporcunun katıldığı bir 100 metre koşu yarışının bitiminde sporcuların yarışı kaç saniyede tamamladıklarını gösteren tablo aşağıda verilmiştir. Her bir sporcunun yarışı bitirme süresi birbirinden farklıdır.

Sporcu	Yarışı Bitirme Süresi (sn.)
Ali	12,6a
Bora	12,6b
Cem	12,7c
Deniz	12,7d
Efe	12,7e

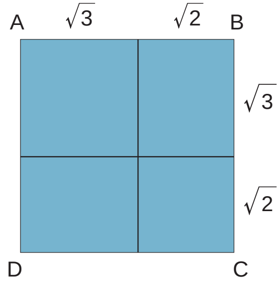
Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Ali 1. olduysa a ve b rakamlarını sıralayınız.

b) Bora 1. olduysa a nın hangi değeri alamayacağını bulunuz.

c) Cem 3. ve Efe 5. olduysa c, d ve e sayılarını sıralayınız.

7. Aşağıda kare şeklindeki bir oyun kartı verilmiştir. Kartın yüzeyi kare ve dikdörtgen şeklindeki parçalara ayrılmış, her bir parçanın bir kenarının uzunluğu (cm) şekil üzerinde gösterilmiştir.

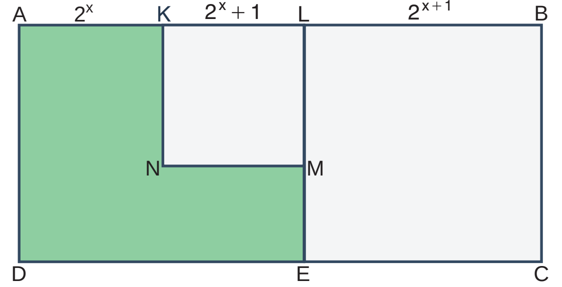


Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Oyun kartında verilen uzunluklardan yararlanarak $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$ ifadesinin eşitini geometrik temsiller yardımıyla bulunuz.

b) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$ ifadesinin eşitini gerçek sayılarda işlem özelliklerini kullanarak bulunuz. Bulduğunuz ifadeyi a şıkkında bulduğunuz sonuç ile karşılaştırınız.

8. Aşağıda verilen ABCD dikdörtgeni biçimindeki bir arsa, KLMN ve BCEL kareleri şeklinde iki parsele ayrılacaktır. Kalan kısım yeşil alan, KLMN karesel bölgesi çocuk parkı olarak düzenlenecektir. $|AK| = 2^x$ birim, $|KL| = \left(2^x + 1\right)$ birim ve $|LB| = 2^{x+1}$ birimdir.



Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Çocuk parkı olarak belirlenen bölgenin alanını x cinsinden ifade ediniz.

b) Yeşil alan olarak belirlenen bölgenin alanını x cinsinden ifade ediniz.

9.



Yukarıdaki görselde bir alışveriş merkezinin otoparkında doğrusal olarak yerleştirilen engelli park alanı levhaları verilmiştir. Bu levhaların yerleri sayı doğrusu üzerinde modellenmiştir. -5^{12} ile 5^{15} noktaları arasına eşit aralıklarla 20 park tabelası yerleştirilmiştir.

Buna göre ardışık iki park tabelası arasındaki mesafenin kaç birim olduğunu bulunuz.

10. Bir radyo istasyonu, bulunduğu noktanın $1,213 \cdot 10^5$ m uzağına kadar yayınını ulaştırabilmektedir. Ayla, Burak ve Ceren'in radyo istasyonuna uzaklıkları sırasıyla $6,84 \cdot 10^4$, $1,3 \cdot 10^5$ ve $0,11 \cdot 10^6$ m'dir.

Buna göre radyo yayını Ayla, Burak ve Ceren'den hangisine ya da hangilerine ulaşır?

A) Burak

B) Ayla ve Burak

C) Ayla ve Ceren

D) Burak ve Ceren

E) Ayla, Burak ve Ceren

11. Aşağıda bir önerme ve bu önermenin ispatı gösterilmiştir.

Önerme: x, y, z ve $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x < y$ ve $z < t$ ise $x - t < y - z$ olur.

Hipotez: x, y, z ve $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x < y$ ve $z < t$ olsun.

Hüküm: $x - t < y - z$ olur.

İspatın adımları aşağıdaki gibidir.

1. Adım: $x - t < y - z$ olduğu gösterilir.

$a \leq b$ ise $a + c \leq b + c$ sıralama özelliği yardımıyla

$x < y$ eşitsizliğinden $x - t < y - t$ eşitsizliği elde edilir.

2. Adım: $-t < -z$ olduğu gösterilir.

$a \leq b$ ve $0 \geq c$ ise $a \cdot c \geq b \cdot c$ sıralama özelliği yardımıyla

$z < t$ eşitsizliğinden $-t < -z$ eşitsizliği elde edilir.

3. Adım: $y - t < y - z$ olduğu gösterilir.

$a \leq b$ ise $a + c \leq b + c$ sıralama özelliği yardımıyla

$-t < -z$ eşitsizliğinden

$y - z < y - t$ eşitsizliği elde edilir.

4. Adım: $x - t < y - z$ olduğu gösterilir.

1 ve 3. adımda elde edilen eşitsizliklerden $x - t < y - z$ eşitsizliği elde edilir.

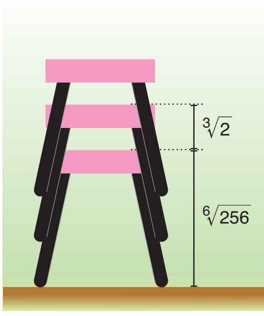
5. Adım: Hükme ulaşılır.

Buna göre ispata ait adımların hangisinde ilk defa hata yapılmıştır?

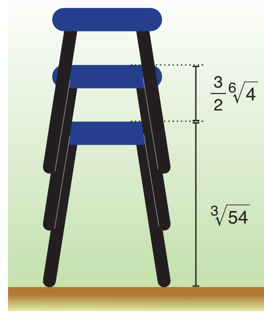
A) 1. adım B) 2. adım C) 3. adım

D) 4. adım E) 5. adım

12. Tabure satan bir mağazada satışa sunulan iki farklı tabure çeşidi Görsel 1 ve Görsel 2'de verilmiştir.



Görsel 1



Görsel 2

Mağazası için bu taburelerden toplu şekilde satın alan Merve Hanım, tabureleri depoya yerleştirirken aynı renk tabureleri üst üste ve tek sıra hâlinde dizmiştir. Tabureler ile ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

- Üst üste dizilen pembe ve mavi taburelerin yerden yükseklikleri eşittir.
- Pembe taburelerin yerden yüksekliği ve üst üste konan iki pembe taburenin üst yüzeyleri arasındaki mesafe Görsel 1'de verilmiştir.
- Mavi taburelerin yerden yüksekliği ve üst üste konan iki mavi taburenin üst yüzeyleri arasındaki mesafe Görsel 2'de verilmiştir.
- Üst üste duran taburelerin her birinin arasındaki mesafe eşittir.

Bu depoda üst üste en fazla 20 tane pembe tabure dizilebildiğine göre mavi taburelerden en çok kaç tanesi üst üste dizilebilir?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

13. Aysun, Burak ve Canan isimli üç arkadaş evden işe giderken aynı tramvaya farklı saatlerde binmiştir. Aşağıdaki tabloda bu üç arkadaşın tramvaya biniş saatleri ve tramvayda bulundukları sürelerle ilgili bazı bilgiler verilmiştir.

	Biniş Saati	Tramvayda Bulundukları Süre
Aysun	07.25	35 dakika
Burak	-	30 dakika
Canan	07.40	40 dakika

Tüm yolculuk boyunca Aysun, Burak ve Canan'ın tramvayda birlikte bulundukları süre 8 dakikadır.

Buna göre

I. Tüm yolculuk boyunca tramvayda Aysun, Burak ve Canan'dan en az birinin bulunduğu süre 55 dakika olabilir.

II. Tüm yolculuk boyunca tramvayda Aysun, Burak ve Canan'dan yalnız ikisinin birlikte bulunduğu süre 27 dakika ise tramvaydan son inen Canan'dır.

III. Tüm yolculuk boyunca tramvayda Aysun, Burak ve Canan'dan yalnız birinin bulunduğu süre 17 dakika ise tramvaya ilk binen Aysun'dur.

ifadelerinden hangileri daima doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) II ve III E) I, II ve III

Tema ile ilgili daha fazla soru çözmek için karekodu okutunuz.



Zenginleştirme bölümüne ulaşmak için karekodu okutunuz.



2.
TEMA

Nicelikler ve Değişimler

2.1. Gerçek Sayılarda Tanımlı Doğrusal Fonksiyonlar ve Nitel Özellikleri

2.2. Gerçek Sayılarda Tanımlı Mutlak Değer Fonksiyonları ve Nitel Özellikleri

2.3. Doğrusal Fonksiyonlarla İfade Edilebilen Denklem ve Eşitsizlikler İçeren Problemler

▶ Anahtar Kavramlar

- artanlık-azalanlık
- bağımlı-bağımsız değişken
- bire birlik
- doğrusal denklem ve eşitsizlik
- doğrusal fonksiyon
- doğrusal ilişki
- eğim
- fonksiyonların parçalı gösterimi
- fonksiyonun işareti
- fonksiyonun sıfırı
- katsayı
- kök
- maksimum-minimum noktaları
- mutlak değer fonksiyonu
- sabit fonksiyon
- sabit terim

▶ Sembol ve Gösterimler

- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
- $f(x) = x$
- $f(x) = ax \pm b$
- $f(x) = |x|$
- $f(x) = \pm |ax \pm b| \pm c$

▶ Bu temada sizden

- gerçek sayılarda $f(x) = x$ şeklinde tanımlı doğrusal referans fonksiyonun nitel özellikleri ile bu fonksiyondan türetilen $g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k$, $(a, r, k \in R, a \neq 0)$ doğrusal fonksiyonlarının nitel özelliklerine ilişkin matematiksel muhakeme yapabilmeniz,
- gerçek sayılarda $f(x) = \pm |ax \pm b| \pm c$ $(a, b, c \in R, a \neq 0)$ şeklinde tanımlı mutlak değer fonksiyonlarının nitel özelliklerini incelemek için doğrusal fonksiyonlara bağlı analojik akıl yürütebilmeniz,
- doğrusal fonksiyonlarla ifade edilebilen denklem ve eşitsizlikleri içeren problemleri çözebilmeniz

beklenmektedir.

Tema boyunca sizden çalışma kâğıtlarındaki soruları çözmeniz, performans görevlerini yerine getirmeniz, ölçme ve değerlendirme sorularını çözmeniz beklenmektedir.



Tema karekodu



Tema sunusuna ulaşmak için karekodu okutunuz.

Başlarken 

Günlük hayatta iki nicelik arasındaki doğrusal ilişkilere sıklıkla rastlanmaktadır. Örneğin okuldan eve sabit hızla yürüyen bir kişinin katettiği mesafe ile zaman, sabit maliyeti olan bir ürünün üretim miktarı ile toplam maliyeti, sabit hızla ilerleyen bir aracın katettiği mesafe ile harcadığı yakıt miktarı arasında doğrusal bir ilişki vardır. Bu doğrusal ilişkileri ifade etmek için doğrusal fonksiyonlar kullanılır.



Ön Değerlendirme

1. Aşağıda doğrusal ilişki içeren gerçek yaşam durumları verilmiştir.

- Sabit hızla yürüyen bir kişinin zamana bağlı aldığı mesafe
- Kullanılan su miktarına bağlı olarak su sayacında yazan değer
- Çekilen fotokopi sayısına bağlı ödenen ücret

Verilen durumları inceleyerek doğrusal ilişki içeren gerçek yaşam durumlarına farklı örnekler veriniz.

2. Gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsilleri $f(x) = 2x - 4$ ve $g(x) = -x + 3$ biçimindedir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Tabloda verilen x değerlerine karşılık gelen f(x) ve g(x) değerlerini bularak tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

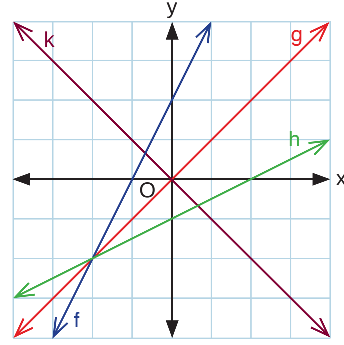
x	–1	0	2	5
$f(x) = 2x - 4$	–6			
$g(x) = -x + 3$	4			

b) f ve g fonksiyonlarında x in aldığı değerler artarken f(x) ve g(x) in aldığı değerlerin nasıl değiştiğini belirleyiniz.

3. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-2x + 13 = \frac{1}{2}$ ifadesinde x değerini bulunuz.

4. $3x - 1 < 0$ eşitsizliğinin gerçek sayılardaki değer aralığını bulunuz.

5. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde gerçek sayılarda tanımlı f, g, h ve k fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) f, g, h ve k fonksiyonlarını temsil eden doğruların eğimlerini bulunuz.

b) Doğrunun eğimi, dik koordinat sistemindeki konumunu nasıl etkilemektedir? Yorumlayınız.

6. Gerçek sayı doğrusu üzerindeki $a = -8$ ve $b = 14{,}4$ noktalarının sıfır noktasına olan uzaklıklarını bulunuz.

2.1. GERÇEK SAYILARDA TANIMLI DOĞRUSAL FONKSİYONLAR VE NİTEL ÖZELLİKLERİ

Konuya Başlarken





Geçmişte haberleşme aracı olarak kullanılan dilek fenerleri, günümüzde genellikle açık hava etkinliklerinde kullanılmaktadır. Dilek fenerlerinin iç kısmında görseldeki gibi bir mum bulunmaktadır. Mum yakıldığında dilek feneri ısının etkisiyle yükselmeye başlar.

Başlangıçta deniz seviyesinde bulunan bir dilek feneri, tabanındaki mum yakıldıktan sonra gökyüzüne doğru bırakılmıştır. Sabit hızla yükseldiği kabul edilen dilek feneri, 1 saniyede 10 cm yükselmektedir.

Dilek fenerinin zamana (sn.) bağlı olarak deniz seviyesinden yüksekliğini (cm) gösteren ilişki, uygun aralıkta $f(x) = 10x$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu ile ifade edilebilir.

Bu ilişkide zaman bağımsız değişken, yükseklik bağımlı değişkendir.

Buna göre aşağıdaki sorularla ilgili fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

1. f fonksiyonunun doğrusal bir ilişkiyi temsil ettiği göz önüne alınırsa fonksiyonun grafiği nasıl çizilebilir?

2. Dilek fenerinin belirli bir süre (sn.) sonra yerden kaç cm yüksekte olduğu nasıl bulunabilir?

3. f fonksiyonunda bağımlı ve bağımsız değişkenin alabileceği değerler nasıl belirlenebilir?

Gerçek yaşamda iki değişken arasında bulunan doğrusal ilişki, doğrusal fonksiyonlarla ifade edilebilir. Doğrusal fonksiyonların grafikleri dik koordinat sisteminde doğru belirtir. Fonksiyonların cebirsel ve grafik temsillerinden yararlanılarak doğrusal ilişki hakkında çıkarımlar yapılabilir.

Gerçek Sayılarda $f(x) = x$ Şeklinde Tanımlı Doğrusal Referans Fonksiyon

Doğrusal fonksiyonların grafikleri ve cebirsel temsilleri yardımıyla nitel özellikleri (tanım kümesi, görüntü kümesi, işareti, artanlığı-azalanlığı, maksimum-minimum noktaları, sıfırı ve bire birliği) belirlenebilir.

Gerçek sayılarda $f(x) = x$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu bir doğrusal fonksiyondur. Doğrusal fonksiyonların grafikleri oluşturulurken ve nitel özellikleri belirlenirken f doğrusal referans fonksiyonundan yararlanılabilir.

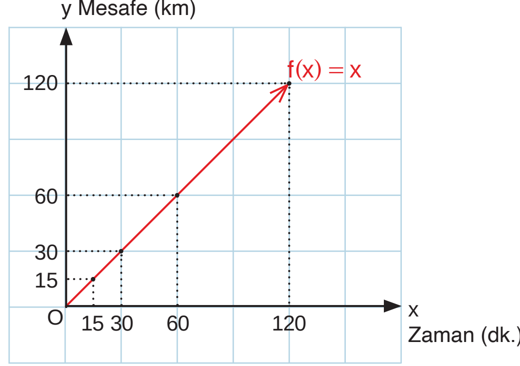
1. Uygulama



Gerçek Sayılarda $f(x) = x$ Şeklinde Tanımlı f Doğrusal Referans Fonksiyonunun Nitel Özellikleri

Verilen bilgileri inceleyerek soruları cevaplayınız.

Sabit hızla hareket eden bir araç, dakikada 1 kilometre yol almaktadır. Araç, sabit hızla 120 dakika boyunca hareket etmiş ve 120 km yol almıştır. Aracın harekete başladığı andan itibaren zamana (dk.) bağlı aldığı mesafeyi (km) gösteren fonksiyon f olmak üzere f fonksiyonunun cebirsel temsili, $f(x) = x$ olur. Aşağıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



1. Aşağıdaki tabloda bağımsız değişkenin (x) aldığı bazı değerlere karşılık gelen bağımlı değişken (f(x)) değerleri verilmiştir. Tabloda verilmeyen değerleri bulunuz.

x	0	15	30	...	120
f(x)	0	...	30	60	...

2. Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri uygun şekilde doldurunuz.

	Minimum (En Küçük) Değer	Maksimum (En Büyük) Değer	Maksimum Nokta	Minimum Nokta	Alabileceği Değerlerin Aralığı
Bağımsız Değişken (x)					
Bağımlı Değişken (f(x))					

3. Bağımsız değişkenin hangi değeri için bağımlı değişkenin sıfıra eşit olduğunu bulunuz.

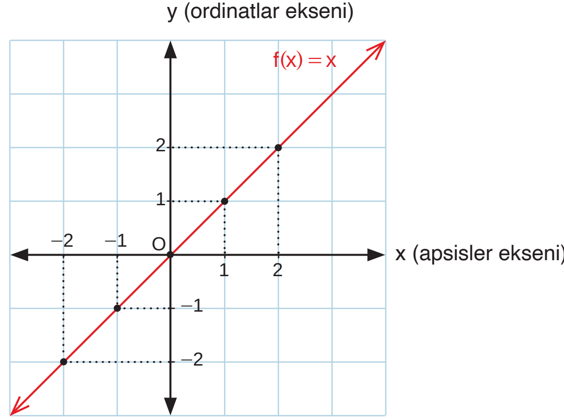
4. Bağımlı değişken; bağımsız değişkenin hangi değerleri için pozitif, hangi değerleri için negatif olur? Bulunuz.

5. Bağımsız değişkenin aldığı değerler artarken f fonksiyonunun aldığı değerlerin nasıl değiştiğini belirleyiniz.

6. Bağımsız değişkenin aldığı iki farklı değer için f fonksiyonunun aldığı değerler birbirinden farklı mıdır? Bu durumun bağımsız değişkenin alabileceği tüm değerler için geçerli olup olmadığını açıklayınız.

7. Tüm gerçek sayılar düşünüldüğünde f fonksiyonunun grafiği için yukarıdaki soruların cevaplarının nasıl değişeceğini açıklayınız.

Grafik 2.1'de $y = f(x) = x$ şeklinde tanımlı doğrusal referans fonksiyonun grafiği, Tablo 2.1'de x e bağlı $f(x)$ in aldığı bazı değerler verilmiştir.



Grafik 2.1: *f fonksiyonunun grafik temsili*

Tablo 2.1: *f Fonksiyonunda x e Bağlı f(x) in Aldığı Bazı Değerler*

x	$-\infty$	...	-2	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	...	∞
$y = f(x)$	$-\infty$	...	-2	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	...	∞

Bir fonksiyonda bağımsız değişkenin alabileceği tüm değerler, fonksiyonun **tanım kümesi** olarak adlandırılır. Bağımsız değişkenin alabileceği tüm değerlere karşılık bağımlı değişkenin alabileceği tüm değerler, **görüntü kümesi** olarak adlandırılır.

Cebirsel temsili $f(x) = x$ olan f fonksiyonunda x, tüm gerçek sayı değerlerini alabilir. Bu sebeple f fonksiyonunun en geniş tanım kümesi gerçek sayılardır. f fonksiyonu, x in aldığı tüm gerçek sayı değerlerini kendisi ile eşleştirir. Bu sebeple f fonksiyonunun görüntü kümesi gerçek sayılardır.

Buradan f fonksiyonu, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanabilir.

f fonksiyonunda $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x değerine f fonksiyonunun **sıfırı** denir.

Grafik 2.1 ve Tablo 2.1 incelendiğinde $x = 0$ için $f(0) = 0$ olduğu görülür. Buna göre f fonksiyonunun sıfırı sıfırdır.

Grafik 2.1 ve Tablo 2.1 incelendiğinde $x > 0$ iken $f(x)$ in pozitif değerler aldığı, $x < 0$ iken $f(x)$ in negatif değerler aldığı görülür. f fonksiyonunun sıfırına göre işaret incelemesi aşağıdaki gibi yapılabilir.

x	$-\infty$		0		∞
$f(x) = x$		$-$	0	$+$	

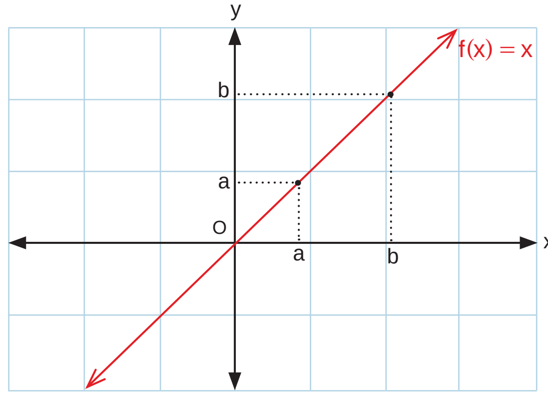
Bir fonksiyonda bağımlı değişken; bağımsız değişkenin bazı değerleri için pozitif, bazı değerleri için negatif olabilir. İşaret incelemesi, fonksiyonun sıfırı dikkate alınarak yapılır.

İşaret tablosuna göre $\forall x \in (-\infty, 0)$ için fonksiyonun işaretinin negatif olduğu, $\forall x \in (0, \infty)$ için fonksiyonun işaretinin pozitif olduğu görülür.

Fonksiyonun tanımlı olduğu belirli bir aralık için bağımsız değişkenin aldığı değerler artarken bağımlı değişkenin aldığı değerler de artıyorsa fonksiyon bu aralıkta **artan**dır.

Fonksiyonun tanımlı olduğu belirli bir aralık için bağımsız değişkenin aldığı değerler artarken bağımlı değişkenin aldığı değerler azalıyorsa fonksiyon bu aralıkta **azalan**dır.

f fonksiyonunda bağımsız değişkenin aldığı değerler artarken bağımlı değişkenin aldığı değerler de artmaktadır. Bu durum, f fonksiyonunun grafiği üzerinde Grafik 2.2'deki gibi gösterilir.



Grafik 2.2: *f fonksiyonunun artanlığının gösterimi*

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ için
$a < b$ iken $f(a) < f(b)$ oluyorsa f, gerçek sayılarda **artan**;
$a < b$ iken $f(a) > f(b)$ oluyorsa f, gerçek sayılarda **azalan** fonksiyondur.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve f fonksiyonu $[a, b]$nda tanımlı olsun.

$\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \leq f(m)$ şartını sağlayan $f(m)$ değerine f fonksiyonunun **maksimum değeri**, $(m, f(m))$ noktasına f fonksiyonunun **maksimum noktası** denir.

$\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \geq f(n)$ şartını sağlayan $f(n)$ değerine f fonksiyonunun **minimum değeri**, $(n, f(n))$ noktasına f fonksiyonunun **minimum noktası** denir.

Fonksiyonun tanım kümesi değiştikçe maksimum ve minimum değerleri değişebilir. Örneğin gerçek sayılarda $f(x)=x$ şeklinde tanımlı doğrusal referans fonksiyon $[1, 5]$nda incelendiğinde tanım aralığındaki x=1 değeri için fonksiyonun 1 değerini aldığı, tanım aralığındaki 5 değeri için 5 değerini aldığı görülmektedir. Buradan f fonksiyonunun minimum değerinin 1, minimum noktasının (1,1); maksimum değerinin 5, maksimum noktasının (5,5) olduğu görülür.

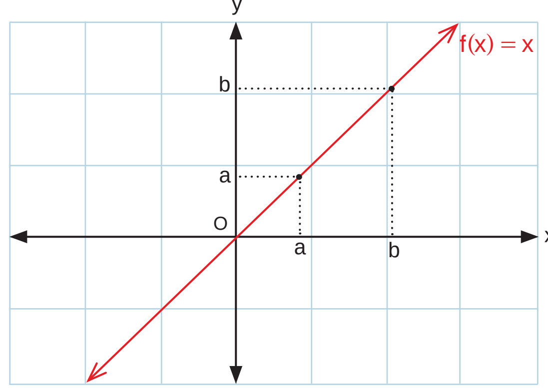
Benzer şekilde f fonksiyonu

$[0, \infty)$nda incelendiğinde minimum değerinin 0 olduğu, maksimum değerinin olmadığı;

$(-\infty, 0]$nda incelendiğinde minimum değerinin olmadığı, maksimum değerinin 0 olduğu görülür.

Bir f fonksiyonunda tanım kümesinde farklı x değerlerine karşılık gelen $f(x)$ değerleri birbirinden farklı ise f, **bire bir** fonksiyondur. Benzer şekilde görüntü kümesindeki bir $f(x)$ değerine tanım kümesinde sadece bir x değeri karşılık geliyorsa f, **bire bir** fonksiyondur.

f fonksiyonunun bire birliği, Grafik 2.3'teki gibi gösterilebilir.



Grafik 2.3: *f fonksiyonunun bire bir olduğunun gösterimi*

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunda $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $f(a) = a$ ve $f(b) = b$ olur.
Buradan $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ ve $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ olur. Bu durumda f, bire bir fonksiyondur.

Gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonunda a ve b, tanım kümesinin herhangi iki elemanı olsun.
Grafik 2.3'te a ve b değerleri birbirinden farklı iken $f(a)$ ve $f(b)$ değerlerinin de birbirinden farklı olduğu, $f(a)$ ve $f(b)$ değerleri birbirine eşit iken a ve b değerlerinin de birbirine eşit olduğu görülmektedir.

Kontrol Noktası 

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ şeklinde tanımlı f doğrusal referans fonksiyonunun nitel özellikleri aşağıdaki gibidir.

- f fonksiyonunun en geniş **tanım ve görüntü kümeleri** gerçek sayılardır.
- f fonksiyonunun işareti, tablo ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

x	$-\infty$		0		∞
f(x)		$-$	0	$+$	

- f fonksiyonunda $x = 0$ için $f(0) = 0$ olduğundan $x = 0$ f fonksiyonunun **sıfırı**dır.
- f fonksiyonunun **maksimum** ve **minimum** noktası yoktur.
- f fonksiyonu gerçek sayılarda **artan**dır.
- f fonksiyonu **bire bir**dir.

Gerçek Sayılarda $g(x)=a \cdot f(x \pm r) \pm k$ Şeklinde Tanımlı Doğrusal Fonksiyonlar

$a, r, k \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere gerçek sayılarda $f(x) = x$ şeklinde tanımlı f doğrusal referans fonksiyonundan türetilen ve $g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k$ şeklinde ifade edilen fonksiyonlara **doğrusal fonksiyon** denir.

Doğrusal fonksiyonların grafikleri, bir doğru belirtir ve $f(x) = x$ şeklinde tanımlı doğrusal referans fonksiyondan türetilen fonksiyonlardan elde edilebilir.

2. Uygulama



Gerçek Sayılarda $g(x) = ax$ Şeklinde Tanımlı Doğrusal Fonksiyonların İncelenmesi

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. $a \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ şeklinde tanımlı doğrusal referans fonksiyonun grafiğinden yararlanılarak $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax$ fonksiyonunun grafiği nasıl elde edilebilir? Varsayımlarınızı sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışarak oluşturunuz.

2. Tablo 1'de a gerçek sayısının bazı değerleri için oluşturulan, gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonlar verilmiştir. Bu fonksiyonların bazı x değerleri için aldığı değerleri bularak tabloda ilgili yere örnekteki gibi yazınız.

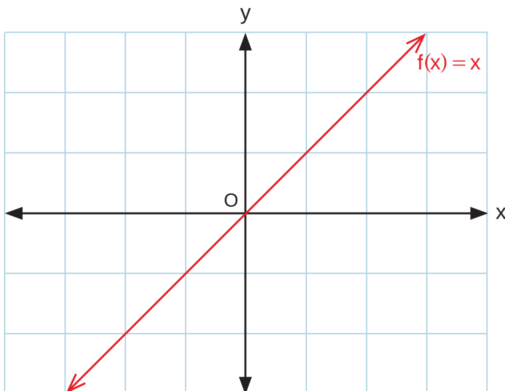
Tablo 1

Fonksiyon	$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
$f(x) = x$	$f(-2) = -2$	$f(-1) = -1$	$f(0) = 0$	$f(1) = 1$	$f(2) = 2$
$h(x) = 3x$					
$k(x) = \frac{x}{2}$					
$m(x) = -2x$					
$n(x) = -\frac{2x}{3}$					

3. Tablo 1'de elde ettiğiniz sonuçlar doğrultusunda $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax$ şeklinde tanımlı doğrusal fonksiyonun grafiğinin nasıl çizilebileceği ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

4. 1. maddedeki varsayımlarınızla genellemelerinizi karşılaştırarak $a > 0$ veya $a < 0$ için $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax$ şeklinde tanımlı fonksiyonun grafiğinin nasıl çizilebileceği ile ilgili önermelerinizi oluşturunuz.

5. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde gerçek sayılarda $f(x) = x$ şeklinde tanımlı doğrusal referans fonksiyonun grafiği verilmiştir. Tablo 1'de elde ettiğiniz bilgilerden yararlanarak h, k, m ve n fonksiyonlarının grafiklerini aynı koordinat sisteminde çizerek Tablo 2'yi doldurunuz. Grafikler baştaki varsayımınızı doğrulamakta mıdır?



Tablo 2

Fonksiyon	Fonksiyonun Sıfırı	Fonksiyon Grafiğinin y Eksenini Kestiği Noktanın Ordinatı	Fonksiyonu Temsil Eden Doğrunun Eğimi
f	0	0	1
h			
k			
m			
n			

6. Çizdiğiniz grafiklerden ve f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f(x) = x şeklinde tanımlı doğrusal fonksiyonun nitel özelliklerinden yararlanarak a > 0 ve a < 0 durumları için g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, g(x) = ax şeklinde tanımlı doğrusal fonksiyonun nitel özellikleri (tanım ve görüntü kümeleri, işareti, artanlığı-azalanlığı, maksimum-minimum noktaları, sıfırı ve bire birliği) ile ilgili varsayımlarınızı oluşturunuz.

7. Tablo 3'te verilen gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonların nitel özelliklerini bularak tabloda ilgili yere örnekteki gibi yazınız.

Tablo 3

Fonksiyon / **Nitel Özellik**		$f(x) = x$	$h(x) = 3x$	$k(x) = \frac{x}{2}$	$m(x) = -2x$	$n(x) = -\frac{2x}{3}$
Tanım Kümesi (Aralığı)		$\mathbb{R}$				
Görüntü Kümesi (Aralığı)		$\mathbb{R}$				
İşareti	−	$(-\infty, 0)$				
	+	$(0, \infty)$				
Sıfırı		0				
Artanlık-Azalanlık		Artan				
Maksimum Noktası		Yok				
Minimum Noktası		Yok				
Bire Birliği		Bire bir				

8. Tablo 3'te elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak a > 0 ve a < 0 durumları için g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, g(x) = ax şeklinde tanımlı g doğrusal fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

9. 6. maddede oluşturduğunuz varsayımlarla genellemelerinizi karşılaştırarak a > 0 ve a < 0 durumları için g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, g(x) = ax şeklinde tanımlı g doğrusal fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili önermelerinizi oluşturunuz.

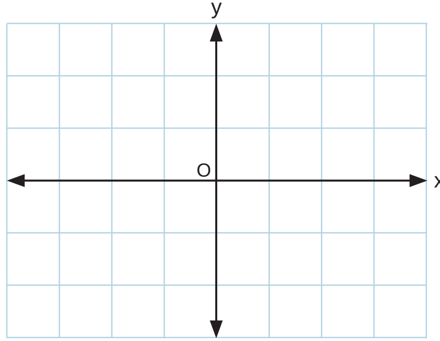
10. Aşağıdaki problemi inceleyerek soruları cevaplayınız.

Kırımızı ışıkta duran A ve B araçları harekete başladıkları andan itibaren 20 saniye boyunca sabit ivme ile hızlanmıştır. A ve B araçlarının zamana (sn.) bağlı hızlarını (m/sn.) gösteren fonksiyonlar sırasıyla f ve g olmak üzere f: $[0, 20] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2}$, g: $[0, 20] \rightarrow \mathbb{R}$, g(x) = 2x şeklindedir.



a) A ve B araçlarının zamana bağlı hızlarını inceleyiniz. Araçların hızları arasında nasıl bir ilişki bulunduğunu açıklayınız.

b) A ve B araçlarının zamana (sn.) bağlı hızlarını (m/sn.) ifade eden fonksiyonların grafiklerini çiziniz.



c) Grafiklerin eğimi ile araçların hızları arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayınız.

ç) f ve g fonksiyonlarının minimum ve maksimum değerleri ile araçların hızları arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayınız.

d) Ulaştığınız önermelerin problemin çözümünde size ne tür kolaylıklar sağladığını açıklayınız.

11. Fonksiyonları temsil eden grafikler ve bu fonksiyonların nitel özellikleri ile ilgili oluşturduğunuz önermelerin doğruluğunu göstermek için matematik yazılımlarından nasıl yararlanılabilir? Sınıfça tartışınız ve aşağıdaki adımları inceleyip kendi önermeleriniz için uygulayınız.

1. adım: Bilgisayar veya etkileşimli tahtada matematik yazılımını açarak **Giriş** bölümüne g(x) = ax yazıp **Enter** tuşuna basınız. Ekranda g fonksiyonunun grafiği ve a sürgüsü oluşacaktır.

2. adım: a sürgüsünü hareket ettirerek grafikteki değişimleri gözlemleyiniz.

3. adım: Gözlemlerinizden yararlanarak önermelerinizi doğrulayınız.

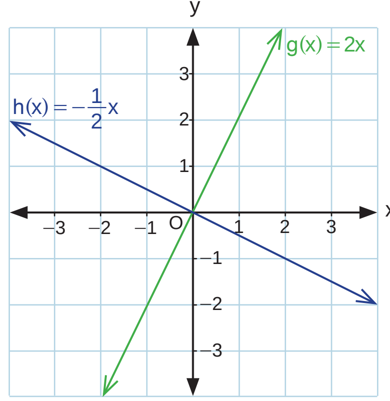
Matematik yazılımı ile ilgili videoya ulaşmak için karekodu okutunuz.



12. Doğrulama yöntemlerinizi kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

1. ÖRNEK

g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x$ ve h: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = -\frac{1}{2}x$ şeklinde tanımlı doğrusal fonksiyonların grafikleri, aşağıdaki dik koordinat sisteminde verilmiştir.



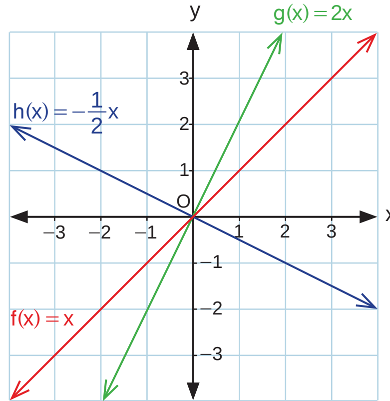
Cebirsel temsillerini de dikkate alarak g ve h fonksiyonlarını temsil eden doğruların eğimlerini $f(x) = x$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunu temsil eden doğrunun eğimi ve grafiği ile karşılaştırınız. Aralarındaki ilişkiyi yorumlayınız.

Çözüm

$g(x) = 2x$ şeklinde tanımlı g fonksiyonu tanım aralığındaki her elemanı 2 katı ile,

$h(x) = -\frac{1}{2}x$ şeklinde tanımlı h fonksiyonu tanım aralığındaki her elemanı $-\frac{1}{2}$ katı ile eşlemektedir.

g fonksiyonunu temsil eden doğrunun eğimi 2 ve h fonksiyonunu temsil eden doğrunun eğimi $-\frac{1}{2}$'dir.



g fonksiyonunun grafiği, f fonksiyonunun grafiğine göre y eksenine daha yakındır.
h fonksiyonunun grafiği, f fonksiyonunun grafiğine göre x eksenine daha yakındır.

3. Uygulama



Gerçek Sayılarda $g(x) = x + b$ Şeklinde Tanımlı Doğrusal Fonksiyonların İncelenmesi

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ şeklinde tanımlı f fonksiyonundan yararlanılarak $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + b$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun grafiği nasıl elde edilebilir? Varsayımlarınızı sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışarak oluşturunuz.

2. Tablo 1'de b gerçek sayısının bazı değerleri için türetilen gerçek sayılarda tanımlı doğrusal fonksiyonlar verilmiştir. Verilen fonksiyonların bazı x değerleri için aldığı değerleri bularak tabloda ilgili yere örnekteki gibi yazınız.

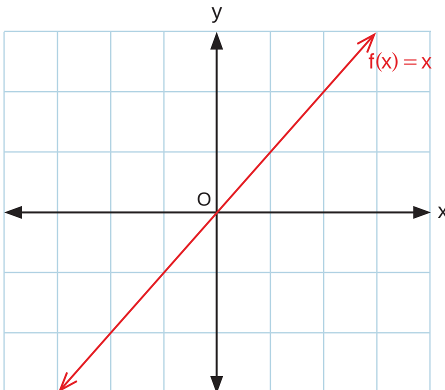
Tablo 1

Fonksiyon	$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
$f(x) = x$	$f(-2) = -2$	$f(-1) = -1$	$f(0) = 0$	$f(1) = 1$	$f(2) = 2$
$h(x) = x + 4$					
$k(x) = x + \frac{1}{2}$					
$m(x) = x - 1$					
$n(x) = x - \frac{7}{2}$					

3. Tablo 1'de elde ettiğiniz sonuçlar doğrultusunda $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + b$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun grafiğinin nasıl çizilebileceği ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

4. 1. maddedeki varsayımlarınızla genellemelerinizi karşılaştırarak $b > 0$ ve $b < 0$ için $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + b$ şeklinde tanımlı fonksiyonun grafiğinin nasıl çizilebileceği ile ilgili önermelerinizi oluşturunuz. Oluşturduğunuz önermeleri sınıf arkadaşlarınızın önermeleri ile karşılaştırınız.

5. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde gerçek sayılarda $f(x) = x$ şeklinde tanımlı f doğrusal referans fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Tablo 1'den yararlanarak h, k, m ve n fonksiyonlarının grafiklerini aşağıda verilen dik koordinat sisteminde çiziniz. Çizdiğiniz grafiklerden yararlanarak Tablo 2'yi örnekteki gibi doldurunuz.



Tablo 2

Fonksiyon	Fonksiyonun Sıfırı	Fonksiyonun Grafiğinin y Eksenini Kestiği Noktanın Ordinatı	Fonksiyonu Temsil Eden Doğrunun Eğimi
f	0	0	1
h			
k			
m			
n			

6. Çizdiğiniz grafiklerden ve $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ şeklinde tanımlı doğrusal fonksiyonun nitel özelliklerinden yararlanarak $b > 0$ ve $b < 0$ durumları için $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + b$ şeklinde tanımlı g doğrusal fonksiyonunun nitel özellikleri (tanım ve görüntü kümeleri, işareti, artanlığı-azalanlığı, maksimum-minimum noktaları, sıfırı ve bire birliği) ile ilgili varsayımlarınızı oluşturunuz.

7. Tablo 3'te verilen fonksiyonların nitel özelliklerini bularak tabloda ilgili yere örnekteki gibi yazınız.

Tablo 3

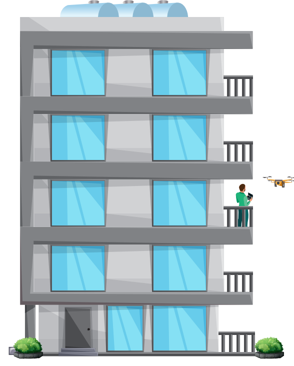
Nitel Özellik \ Fonksiyon		$f(x) = x$	$h(x) = x + 4$	$k(x) = x + \frac{1}{2}$	$m(x) = x - 1$	$n(x) = x - \frac{7}{2}$
Tanım Kümesi		$\mathbb{R}$				
Görüntü Kümesi		$\mathbb{R}$				
İşareti	$-$	$(-\infty, 0)$				
	$+$	$(0, \infty)$				
Sıfırı		0				
Artanlık-Azalanlık		Artan				
Maksimum Noktası		Yok				
Minimum Noktası		Yok				
Bire Birliği		Bire bir				

8. Tablo 3'te bulduğunuz değerlerden yararlanarak $b > 0$ ve $b < 0$ için $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + b$ şeklinde tanımlı g doğrusal fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

9. 6. maddede oluşturduğunuz varsayımlarla genellemelerinizi karşılaştırarak $b > 0$ ve $b < 0$ için $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + b$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili önermelerinizi oluşturunuz.

10. Aşağıdaki problemi inceleyerek soruları cevaplayınız.

Oğuz Bey, çatıda bulunan su depolarında sızıntı olup olmadığını kontrol etmek için uçuş izni alarak drone (dıron) kullanacaktır. Bu aracı evinin yerden 10 metre yüksekteki balkonundan bir süre uçurmuşsa da rahatça kontrol edememiştir (1. durum). Daha sonra apartmanın bahçesine inerek aracı kullanmıştır (2. durum). Drone, sabit hızla dakikada 10 m yükselmektedir.



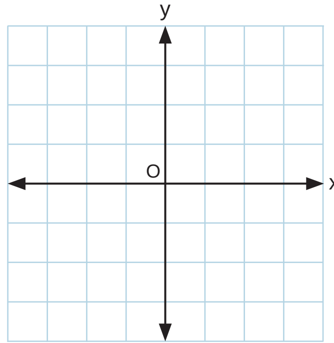
1. durum



2. durum

a) Oğuz Bey'in aracı kullandığı her iki durumu da inceleyiniz. Aracın hareketini ifade eden zaman (dk.) ve yerden yükseklik (m) değişkenleri arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayınız.

b) 1 ve 2. durumda aracın zamana (dk.) bağlı yerden yüksekliğini (m) veren fonksiyonlar sırasıyla m ve n olsun. m ve n fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.



c) 1. durumda aracın yerden 10 m yüksekten harekete başlamasının 2. durumla kıyaslandığında hangi farklılıklara sebep olduğunu yükseklik fonksiyonlarının grafik ve cebirsel ifadesini dikkate alarak yorumlayınız.

ç) m ve n fonksiyonlarını temsil eden doğruların eğimlerini bulunuz. Doğruların eğimlerini fonksiyonların grafik temsillerini de dikkate alarak karşılaştırınız. Vardığınız sonuca göre aracın 1 ve 2. durumdaki hareketleri ile ilgili ne söylenebilir?

d) m ve n fonksiyonlarının minimum ve maksimum değerleri neler olabilir? Bu değerler iki durum için ne gibi farklılıklar göstermektedir?

e) Grafiklerden yararlanarak m ve n fonksiyonlarını temsil eden doğruların y eksenini kestiği noktaları ve varsa yükseklik fonksiyonlarının sıfırlarını bulunuz. Bu noktaların aracın 1 ve 2. durumdaki hareketleri ile ilgili neleri ifade ettiğini açıklayınız.

f) Yükseklik fonksiyonlarının artanlığı veya azalanlığı ile ilgili ne söylenebilir? Hangi kanıtlara dayanarak bu sonuca ulaştığınızı açıklayınız.

g) Ulaştığınız önermelerin problemin çözümünde ne tür bir kolaylık sağladığını açıklayınız.

11. Fonksiyonları temsil eden grafikler ve bu fonksiyonların nitel özellikleri ile ilgili oluşturduğunuz önermelerin doğruluğunu göstermek için matematik yazılımlarından nasıl yararlanılabilir? Sınıfça tartışınız ve aşağıdaki adımları inceleyip kendi önermeleriniz için uygulayınız.

1. adım: Bilgisayar veya etkileşimli tahtada matematik yazılımını açarak **Giriş** bölümüne f(x) = x + b yazıp **Enter** tuşuna basınız. Ekranda f fonksiyonunun grafiği ve b sürgüsü oluşacaktır.

2. adım: b sürgüsünü sağa ve sola hareket ettirerek önermelerinizi doğrulayınız.

Matematik yazılımı ile ilgili videoya ulaşmak için karekodu okutunuz.



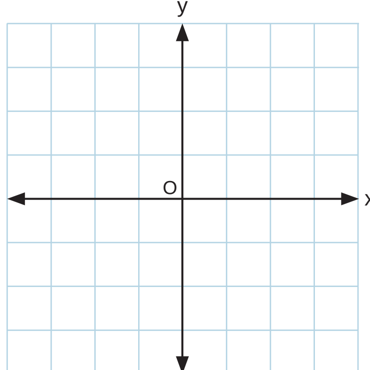
12. Doğrulama yöntemlerinizi sınıf arkadaşlarınızın kullandığı yöntemlerle karşılaştırarak kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

1. Sıra Sizde

g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, g(x) = x + 2 ve h: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, h(x) = x – 2 şeklinde tanımlı g ve h fonksiyonları veriliyor.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f(x) = x şeklinde tanımlı f doğrusal referans fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak g ve h fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.



b) f, g ve h fonksiyonlarının grafiklerinden yararlanarak eğimlerini bulunuz ve karşılaştırınız.

c) g ve h fonksiyonlarının maksimum ve minimum noktalarını, sıfırlarını, fonksiyonları temsil eden grafiklerin y eksenini kestikleri noktaları bulunuz.

ç) g ve h fonksiyonlarının artan veya azalan olduğu aralıkları belirleyiniz.

d) g ve h fonksiyonlarının bire bir olup olmadıklarını inceleyiniz.

4. Uygulama

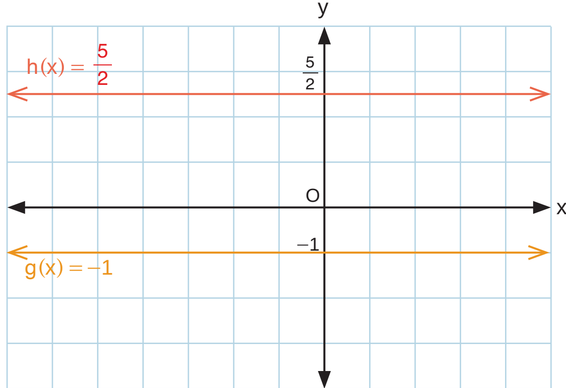


Gerçek Sayılarda $a \in \mathbb{R}$ Olmak Üzere g(x) = a Şeklinde Tanımlı Doğrusal Fonksiyonların İncelenmesi

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Aşağıda dik koordinat sistemi üzerinde gerçek sayılarda $g(x) = -1$ ve $h(x) = \frac{5}{2}$ şeklinde tanımlı g ve h doğrusal fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre gerçek sayılarda $m(x) = \sqrt{2}$ ve $k(x) = -2$ şeklinde tanımlı m ve k doğrusal fonksiyonlarının grafiklerini aynı dik koordinat sistemi üzerinde çiziniz.



2. Gerçek sayılarda tanımlı g, h, m ve k doğrusal fonksiyonlarına ait grafiklerin eğimleri ile ilgili ne söylenebilir?

3. Gerçek sayılarda tanımlı g, h, m ve k doğrusal fonksiyonlarının nitel özellikleri ile ilgili neler söylenebilir?

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a = 0$ için $f(x) = b$ şeklinde tanımlı f fonksiyonuna **sabit fonksiyon** denir. Sabit fonksiyon da bir doğrusal fonksiyondur.

5. Uygulama



Gerçek Sayılarda $g(x) = ax + b$ Şeklinde Tanımlı Doğrusal Fonksiyonların İncelenmesi

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunun grafiğinden yararlanılarak $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$ şeklinde tanımlı doğrusal fonksiyonların grafikleri nasıl elde edilebilir? Varsayımlarınızı sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışarak oluşturunuz.



2. Tablo 1'de a ve b gerçek sayılarının bazı değerleri için oluşturulan gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonlar verilmiştir. Verilen fonksiyonların bazı x değerleri için aldığı değerleri bularak tabloda ilgili yerlere örnekteki gibi yazınız.

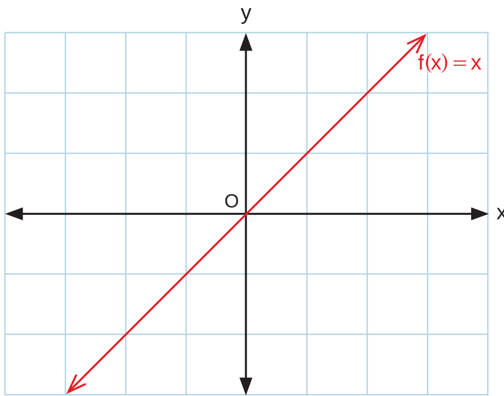
Tablo 1

Fonksiyon	$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
$f(x) = x$	$f(-2) = -2$	$f(-1) = -1$	$f(0) = 0$	$f(1) = 1$	$f(2) = 2$
$h(x) = 2x - 5$					
$k(x) = \frac{x}{4} + 1$					
$m(x) = -x + \sqrt{3}$					
$n(x) = -3x - 4$					

3. Tablo 1'de elde ettiğiniz sonuçlar doğrultusunda $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun grafiğinin nasıl çizilebileceği ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

4. 1. maddedeki varsayımlarınızla genellemelerinizi karşılaştırarak $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun grafiğinin nasıl çizilebileceği ile ilgili önermelerinizi oluşturunuz.

5. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde gerçek sayılarda $f(x) = x$ şeklinde tanımlı doğrusal f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Tablo 1'den yararlanarak h, k, m ve n fonksiyonlarının grafiklerini aşağıda verilen dik koordinat sisteminde çiziniz. Grafikler yardımıyla Tablo 2'yi örnekteki gibi doldurunuz.



Tablo 2

Fonksiyon	Fonksiyonun Sıfırı	Fonksiyonun Grafiğinin y Eksenini Kestiği Noktanın Ordinatı	Fonksiyonu Temsil Eden Doğrunun Eğimi
f	0	0	1
h			
k			
m			
n			

6. Çizdiğiniz grafiklerden ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ şeklinde tanımlı f doğrusal referans fonksiyonunun nitel özelliklerinden yararlanarak $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$ şeklinde tanımlı g doğrusal fonksiyonunun nitel özellikleri (tanım ve görüntü kümeleri, işareti, artanlığı-azalanlığı, maksimum-minimum noktaları, sıfırı ve bire birliği) ile ilgili varsayımlarınızı oluşturunuz.

7. Tablo 3'te verilen gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonların nitel özelliklerini bularak tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 3

Nitel Özellik \ Fonksiyon		$f(x) = x$	$h(x) = 2x - 5$	$k(x) = \frac{x}{4} + 1$	$m(x) = -x + \sqrt{3}$	$n(x) = -3x - 4$
Tanım Kümesi		$\mathbb{R}$				
Görüntü Kümesi		$\mathbb{R}$				
İşareti	−	$(-\infty, 0)$				
	+	$(0, \infty)$				
Sıfırı		0				
Artanlık-Azalanlık		Artan				
Maksimum Değeri		Yok				
Minimum Değeri		Yok				
Bire Birliği		Bire bir				

8. Tablo 3'te bulduğunuz değerlerden yararlanarak $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$ şeklinde tanımlı g doğrusal fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

9. 6. maddede oluşturduğunuz varsayımlarla genellemelerinizi karşılaştırarak $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$ şeklinde tanımlı g doğrusal fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili önermelerinizi oluşturunuz.

10. Aşağıdaki problemi inceleyerek soruları cevaplayınız.
Görselde bir koşu pistinde antrenman yapan 4 koşucu ve bir hakem verilmiştir.

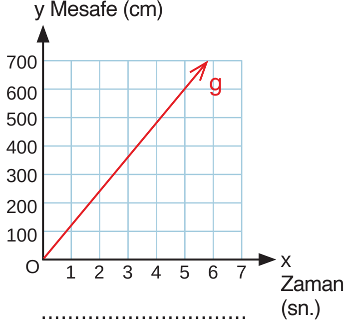


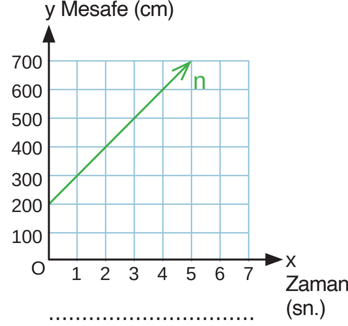
Sabit hızla koşan sporculardan 1 ve 2.si başlangıç çizgisinde bulunduğu anda 3 ve 4.sü başlangıç çizgisine sırasıyla 2 metre ve 3 metre uzaklıkta bulunmaktadır. Hakem ise başlangıç çizgisinden 6 metre uzakta hareket etmeden beklemektedir. Koşucular 100 metre ilerideki bitiş çizgisine kadar koşmaya devam etmiştir.

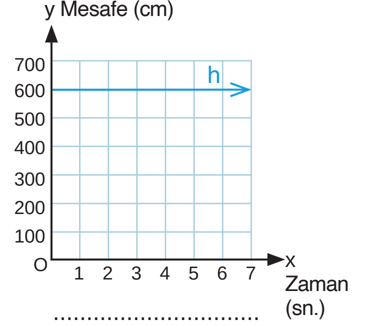
1. koşucu saniyede 120 cm, 2. koşucu saniyede 150 cm, 3. koşucu saniyede 100 cm, 4. koşucu saniyede 50 cm koşmaktadır.

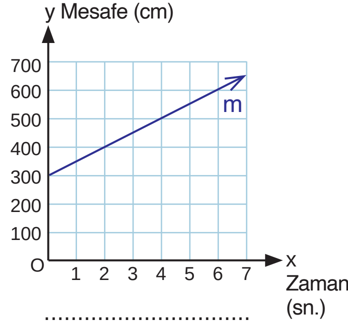
Koşucular görseldeki konumdayken başlatılan süre 100 metre sonunda durdurulmuştur. Koşucular ve hakemin zamana (sn.) bağlı başlangıç noktalarına göre aldıkları mesafeyi (cm) gösteren fonksiyonlar sırasıyla g, h, k, m ve n olsun.

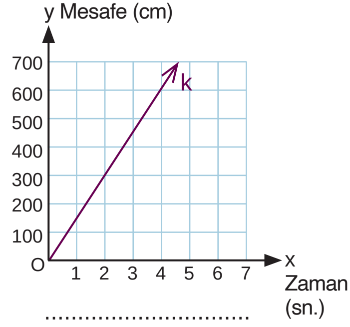
a) Aşağıda verilen grafiklerin hangi koşuculara ait olabileceğini ve hakeme ait olan grafiği belirleyerek grafiklerin altındaki boşluklara yazınız.











b) Koşucularla ilgili bilgileri ve koşucuların zamana bağlı konumlarındaki değişimi gösteren grafikleri inceleyiniz. Koşucuların ve hakemin hareketine ait değişkenleri ve bu değişkenlerin aralarındaki ilişkileri tespit ediniz.

c) Koşucuların ve hakemin zamana (sn.) bağlı konumlarındaki (cm) değişimi gösteren fonksiyonları cebirsel olarak ifade ediniz.

ç) Grafiklerden yararlanarak hangi koşucunun bitiş çizgisine daha önce ulaşacağı söylenebilir? Nedenleriyle açıklayınız.

d) Grafiklerden yararlanarak koşuculara ve hakeme ait konum fonksiyonlarını temsil eden doğruların eğimlerini bularak karşılaştırınız. Vardığınız sonuca göre hakemin ve koşucuların hareketi ile ilgili ne söylenebilir?



e) Grafiklerden yararlanarak hangi koşucunun en hızlı, hangisinin en yavaş olduğunu fonksiyonların cebirsel ifadesini de dikkate alarak açıklayınız.

f) Grafiklerden yararlanarak koşucuların ve hakemin konumundaki değişimi temsil eden doğruların varsa y eksenini kestiği noktaları ve konum fonksiyonlarının sıfırını bulunuz. Bu noktaların koşucuların ve hakemin zamana bağlı konumları ile ilgili ne ifade ettiğini açıklayınız.

g) Koşuculara ve hakeme ait konum fonksiyonlarının artanlığı veya azalanlığı ile ilgili ne söylenebilir? Ulaştığınız sonuca hangi kanıtlara dayanarak vardığınızı açıklayınız.

ğ) Ulaştığınız önermelerin problemin çözümünde ne tür bir kolaylık sağladığını açıklayınız.

11. Fonksiyonları temsil eden grafikler ve bu fonksiyonların nitel özellikleri ile ilgili oluşturduğunuz önermelerin doğruluğunu göstermek için hangi doğrulama yöntemleri kullanılabilir? Sınıfça tartışınız ve aşağıdaki adımları inceleyip kendi önermeleriniz için uygulayınız.

1. adım: Bilgisayar veya etkileşimli tahtada matematik yazılımını açarak **Giriş** bölümüne g(x) = ax + b yazıp **Enter** tuşuna basınız. Ekranda g fonksiyonunun grafiği ile a ve b sürgüleri oluşacaktır.

2. adım: a ve b sürgülerini hareket ettirerek grafikteki değişimleri gözlemleyiniz.

3. adım: Gözlemlerinizden yararlanarak önermelerinizi doğrulayınız.

Matematik yazılımı ile ilgili videoya ulaşmak için karekodu okutunuz.



12. f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f(x) = x şeklinde tanımlı f doğrusal referans fonksiyonu için verilen "Her $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ dir." biçimindeki artanlık tanımı ile "Her a > 0 için r: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, r(x) = ax + b şeklinde tanımlı r doğrusal fonksiyonu artandır." önermesi arasında nasıl bir ilişki kurulabilir? Artanlığın tanımından faydalanarak "Her a > 0 için r: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, r(x) = ax + b şeklinde tanımlı r doğrusal fonksiyonu artandır." önermesinin doğruluğunu ispatlayınız.

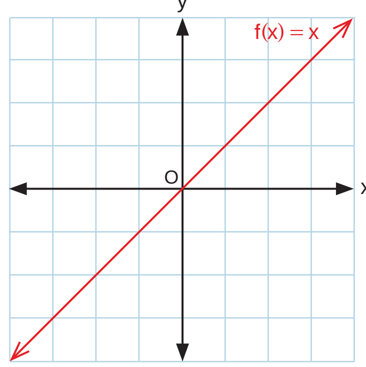
13. Doğrulama yöntemlerinizi sınıf arkadaşlarınızın kullandığı yöntemlerle karşılaştırarak kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

2. Sıra Sizde

m: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $m(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$, n: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n(x) = 6x$ ve k: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = \sqrt{3}$ şeklinde tanımlı doğrusal fonksiyonlar veriliyor.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ **şeklinde tanımlı f doğrusal referans fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak m, n ve k fonksiyonlarının grafiklerini aşağıda verilen dik koordinat sisteminde çiziniz.**



b) Çizdiğiniz grafiklerden yararlanarak m, n ve k fonksiyonlarına ait grafiklerin eğimini bulunuz. Bulduğunuz eğim değerlerini f fonksiyonuna ait grafiğin eğimi ile karşılaştırınız.

c) m, n ve k fonksiyonlarının varsa sıfırını, fonksiyonları temsil eden grafiklerin y eksenini kestikleri noktaları, maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

ç) Fonksiyonların artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.

d) Fonksiyonların bire bir olup olmadıklarını belirleyiniz.

e) Fonksiyonların artanlığı-azalanlığı ve bire birliği ile ilgili ulaştığınız sonuçları bire birlik ve artanlık-azalanlık tanımlarından yararlanarak cebirsel olarak doğrulayınız.

2. ÖRNEK

Bir taksi, A kentinden B kentine doğru sabit hızla ilerlemektedir. Bu taksinin aldığı mesafeye (km) bağlı olarak taksimetrenin gösterdiği ücreti (TL) ifade eden fonksiyon $f:[0, 100] \longrightarrow [30, 1730]$, $f(x) = 17x + 30$ şeklinde tanımlanıyor.

Taksi, hareketinden 1 saat sonra B kentine varmıştır. Taksinin zamana (dk.) bağlı olarak deposunda kalan benzin miktarındaki (l) değişimi ifade eden fonksiyon $g(x) = -\frac{1}{10}x + 20$ şeklinde tanımlanıyor.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Taksinin A kentinden B kentine yolculuğu ile ilgili verilenleri inceleyiniz. Taksimetrenin gösterdiği ücret ile taksinin deposunda kalan benzin miktarını belirleyen değişkenleri ve bu değişkenlerin arasındaki ilişkileri tespit ediniz.

b) g fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz. Bulduğunuz kümeleri hangi kanıtlara dayanarak oluşturduğunuzu açıklayınız.

c) f ve g fonksiyonlarının grafiklerini farklı dik koordinat sistemlerinde çiziniz.

ç) Cebirsel temsillerinden yararlanarak f ve g fonksiyonlarını temsil eden doğruların eğimlerini bulup karşılaştırınız. Vardığınız sonuca göre taksimetrenin kilometre başına gösterdiği ücret ve taksinin deposundan kilometre başına eksilen benzin miktarı ile ilgili ne söylenebileceğini fonksiyonların grafik temsillerini de dikkate alarak yorumlayınız.

d) f ve g fonksiyonlarını temsil eden doğruların y eksenini kestiği noktaları ve fonksiyonların varsa sıfırını bulunuz. Bu noktaların taksimetrenin gösterdiği ücret ve taksinin deposunda kalan benzin miktarı ile ilgili neyi ifade ettiğini yorumlayınız.

e) f ve g fonksiyonlarının artanlığı ve azalanlığı ile ilgili ne söylenebilir? Ulaştığınız sonuca hangi kanıtlara dayanarak vardığınızı açıklayınız.

f) Grafiklerden yararlanarak f ve g fonksiyonlarının bire birliği ile ilgili ne söylenebilir? Ulaştığınız sonucun f ve g fonksiyonları için ne ifade ettiğini açıklayınız.

g) f ve g fonksiyonlarının artanlığı-azalanlığı ve bire bir olup olmadıkları ile ilgili ulaştığınız sonuçları doğrulayınız.

Çözüm

a) Taksimetrenin gösterdiği ücreti (TL) belirleyen değişkenler, sabit taksimetre açılış ücreti ve taksinin aldığı mesafedir (km). Taksimetrenin gösterdiği ücret, bağımlı değişken ve taksinin aldığı mesafe, bağımsız değişkendir.

Taksinin deposunda kalan benzin miktarını (l) belirleyen değişken zamandır (dk.). Depoda kalan benzin miktarı, bağımlı değişken ve zaman, bağımsız değişkendir.

f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsili göz önüne alındığında değişkenler arasındaki ilişkinin doğrusal olduğu görülür.



b) Taksi, yolculuğunu 60 dakika boyunca sürdürmüştür. Bu sürenin başlangıcında depodaki benzin miktarı

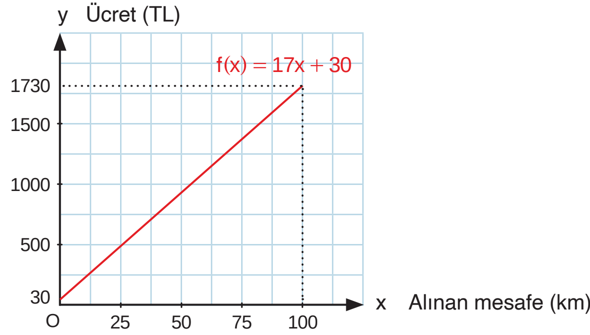
$x = 0$ için $-\dfrac{1}{10} \cdot 0 + 20 = 20$ litre bulunur.

60 dakikanın sonunda depodaki benzin miktarı $-\dfrac{1}{10} \cdot 60 + 20 = -6 + 20 = 14$ litre bulunur.

g fonksiyonu, zamana bağlı (dk.) depoda kalan benzin miktarını (l) göstermektedir. Taksinin yolculuğu 60 dakika sürdüğünden g fonksiyonunun tanım kümesi $[0, 60]$dır. Depodaki benzin miktarı yolculuk başında 20 litre, yolculuk sonunda 14 litre olduğundan g fonksiyonunun görüntü kümesi $[14, 20]$dır.

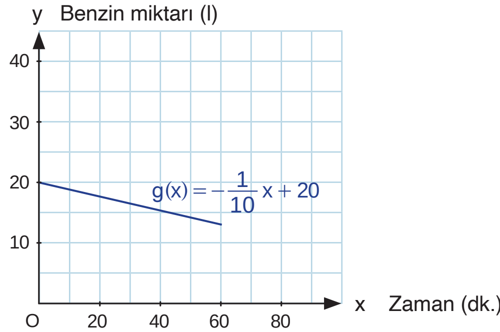
c) f fonksiyonunun grafiğini çizmek için

- $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x$ şeklinde tanımlı h doğrusal referans fonksiyonunun tanım aralığındaki her elemanı 17 katı ile eşleyen $m(x) = 17x$ şeklinde tanımlı m fonksiyonunun grafiği çizilir.
- m fonksiyonunun grafiği, y ekseni boyunca pozitif yönde 30 birim ötelenir.
- f fonksiyonunun tanım kümesi $[0, 100]$ olduğundan elde edilen grafiğin $[0, 100]$ndaki kısmı alınır.



g fonksiyonunun grafiğini çizmek için

- $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x$ fonksiyonunun tanım aralığındaki her elemanı $-\dfrac{1}{10}$ katı ile eşleyen $n(x) = -\dfrac{1}{10}x$ şeklinde tanımlı n doğrusal fonksiyonunun grafiği çizilir.
- n fonksiyonunun grafiği, y ekseni boyunca pozitif yönde 20 birim ötelenir.
- g fonksiyonunun tanım kümesi $[0, 60]$ olduğundan elde edilen grafiğin $[0, 60]$ ndaki kısmı alınır.



ç) f fonksiyonunu temsil eden doğrunun eğimi 17'dir ve taksimetrenin kilometre başına yazdığı ücreti ifade eder. g fonksiyonuna ait grafiğin eğimi $-\frac{1}{10}$'dur ve 1 dakikada depoda olan benzin miktarındaki değişimi ifade eder. f fonksiyonuna ait grafiğin eğimi pozitif, g fonksiyonuna ait grafiğin eğimi negatiftir. f fonksiyonuna ait grafiğin eğiminin pozitif olması, taksinin aldığı mesafe arttıkça taksimetrede yazan ücretin arttığını gösterir. g fonksiyonuna ait grafiğin eğiminin negatif olması, yolculuk süresince zaman ilerledikçe depodaki benzin miktarının azaldığını gösterir.

d) f ve g fonksiyonlarını temsil eden doğruların y eksenini kestiği noktaları bulmak için fonksiyonların cebirsel ifadesinde $x = 0$ yazılır.

$y = f(x) = 17x + 30 \Rightarrow y = 17 \cdot 0 + 30 = 30$ bulunur. $(0, 30)$ noktası, taksi hareketine başlamadan önce taksimetrenin açılış ücretini ifade etmektedir.

$y = g(x) = -\frac{1}{10}x + 20 \Rightarrow y = -\frac{1}{10} \cdot 0 + 20 = 20$ bulunur. $(0, 20)$ noktası, taksi hareketine başlamadan önce taksinin deposunda bulunan benzin miktarını ifade etmektedir.

f ve g fonksiyonlarının sıfırını bulmak için $f(x) = 0$ ve $g(x) = 0$ eşitliklerinden yararlanılır.

$17x + 30 = 0 \Rightarrow 17x = -30 \Rightarrow x = -\frac{30}{17}$ olur. $-\frac{30}{17} \notin [0, 100]$ olduğundan f fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkta sıfırı yoktur. Bu durum, taksimetrenin hiçbir durumda 0 lira göstermeyeceği anlamına gelmektedir.

$-\frac{1}{10}x + 20 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{10}x = -20 \Rightarrow x = \frac{-20}{-\frac{1}{10}} = 200$ olur. $(200, 0)$ noktası, taksi hareketine devam ettiği takdirde 200 dakika sonra aracın deposunda bulunan benzinin tamamen biteceğini ifade etmektedir.

e) Tanımlı olduğu aralıklarda f fonksiyonu artan ve g fonksiyonu azalan fonksiyondur. Eğim değeri pozitif olduğundan f fonksiyonunun artan fonksiyon, eğim değeri negatif olduğundan g fonksiyonunun azalan fonksiyon olduğu söylenebilir. Ayrıca taksinin aldığı mesafe arttıkça ücret de arttığından f fonksiyonunun artan fonksiyon olduğu söylenebilir. Yolculuk esnasında zaman ilerledikçe depodaki benzin azaldığından g fonksiyonunun azalan fonksiyon olduğu söylenebilir.

f) f fonksiyonunun grafiği incelendiğinde her farklı x değeri için $f(x)$ değerlerinin birbirinden farklı olduğu görülür. g fonksiyonu için de bu durum geçerlidir. Bu nedenle f ve g fonksiyonları, tanımlı olduğu aralıklarda bire birdir.

f fonksiyonunun bire bir olması alınan mesafe değiştikçe ücretin değiştiği, g fonksiyonunun bire bir olması yolculuk boyunca zamanla depodaki benzin miktarının değiştiği anlamına gelmektedir.

g) Artanlık tanımından yararlanılarak f fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkta artan olduğu, cebirsel olarak aşağıdaki gibi ispatlanır.

$x_1, x_2 \in [0, 100]$ için $x_1 < x_2$ olsun.

$x_1 < x_2$

$17 \cdot x_1 < 17 \cdot x_2$

$17 \cdot x_1 + 30 < 17 \cdot x_2 + 30 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ olur.



Buna göre f fonksiyonu, tanımlı olduğu aralıkta artandır.

Azalanlık tanımından yararlanılarak g fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkta azalan olduğu, cebirsel olarak aşağıdaki gibi ispatlanır.

$x_1, x_2 \in [0, 200]$ için $x_1 < x_2$ olsun.

$x_1 < x_2$

$-\frac{1}{10} \cdot x_1 > -\frac{1}{10} \cdot x_2$ $\left(-\frac{1}{10} < 0\right.$ olduğundan eşitsizlik yön değiştirir.$\left.\right)$

$-\frac{1}{10} \cdot x_1 + 20 > -\frac{1}{10} \cdot x_2 + 20$

$\Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$ olur.

Buna göre g fonksiyonu, tanımlı olduğu aralıkta azalandır.

Bire birlik tanımından yararlanılarak f ve g fonksiyonlarının tanım aralıklarında bire bir oldukları, cebirsel olarak aşağıdaki gibi ispatlanır.

$x_1, x_2 \in [0, 100]$ için $x_1 \neq x_2$ olsun.

$x_1 \neq x_2$

$17 \cdot x_1 \neq 17 \cdot x_2$

$17 \cdot x_1 + 30 \neq 17 \cdot x_2 + 30$

$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ olur.

Buna göre f fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta bire birdir.

g fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta bire bir olduğu cebirsel temsillerle aşağıdaki gibi gösterilebilir.
$x_1, x_2 \in [0, 200]$ için $x_1 \neq x_2$ olsun.

$x_1 \neq x_2$

$-\frac{1}{10} \cdot x_1 \neq -\frac{1}{10} \cdot x_2$

$-\frac{1}{10} \cdot x_1 + 20 \neq -\frac{1}{10} \cdot x_2 + 20$

$\Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$ olur.

Buna göre g fonksiyonu, tanımlı olduğu aralıkta bire birdir.

6. Uygulama



Gerçek Sayılarda $g(x) = a(x \pm r) \pm k$ Şeklinde Tanımlı Doğrusal Fonksiyonların İncelenmesi

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. a, r, $k \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ şeklinde tanımlı f doğrusal referans fonksiyonunun grafiğinden yararlanılarak $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = a(x \pm r)$ ve $v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $v(x) = a(x \pm r) \pm k$ şeklinde tanımlı doğrusal fonksiyonların grafikleri nasıl elde edilebilir? Varsayımlarınızı sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışarak oluşturunuz.



2. Tablo 1'de a gerçek sayısının bazı değerleri için oluşturulan gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonlar verilmiştir. Verilen fonksiyonların bazı x değerleri için aldığı değerleri bularak tabloda ilgili yere örnekteki gibi yazınız.

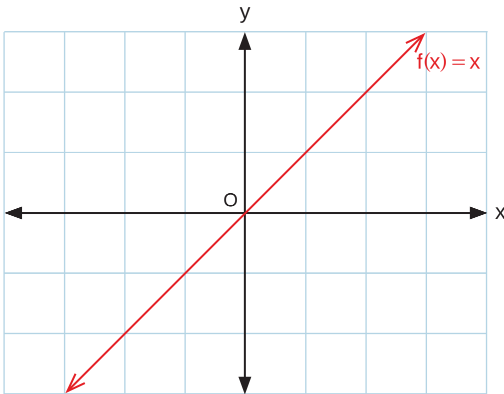
Tablo 1

Fonksiyon	$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
$f(x) = x$	$f(-2) = -2$	$f(-1) = -1$	$f(0) = 0$	$f(1) = 1$	$f(2) = 2$
$g(x) = 2x$					
$h(x) = 2(x - 1)$					
$k(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$					
$m(x) = 3(x + 2) - 4$					
$n(x) = -\frac{1}{3}(x - 3) + 1$					

3. Tablo 1'de elde ettiğiniz sonuçlar doğrultusunda $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = a(x + r)$ ve $v: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(x) = a(x + r) + k$ şeklinde tanımlı doğrusal fonksiyonların grafiğinin nasıl çizilebileceği ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

4. 1. maddede oluşturduğunuz varsayımlarla genellemelerinizi karşılaştırarak $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = a(x + r)$ ve $v: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(x) = a(x + r) + k$ şeklinde tanımlı doğrusal fonksiyonların grafiğinin nasıl çizilebileceği ile ilgili önermelerinizi oluşturunuz.

5. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde gerçek sayılarda $f(x) = x$ şeklinde tanımlı f doğrusal referans fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Tablo 1'de elde ettiğiniz bilgilerden yararlanarak g, h, k, m ve n fonksiyonlarının grafiklerini aşağıda verilen dik koordinat sisteminde çiziniz. Çizdiğiniz grafikler yardımıyla Tablo 2'yi örnekteki gibi doldurunuz.



Tablo 2

Fonksiyon	Fonksiyonun Sıfırı	Fonksiyonun Grafiğinin y Eksenini Kestiği Noktanın Ordinatı	Fonksiyonu Temsil Eden Doğrunun Eğimi
f	0	0	1
g			
h			
k			
m			
n			

6. Çizdiğiniz grafiklerden ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ şeklinde tanımlı f doğrusal referans fonksiyonunun nitel özelliklerinden yararlanarak $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = a(x \pm r)$ ve $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $v(x) = a(x \pm r) \pm k$ şeklinde tanımlı doğrusal fonksiyonların nitel özellikleri (tanım ve görüntü kümeleri, işareti, artanlığı-azalanlığı, maksimum-minimum noktaları, sıfırı ve bire birliği) ile ilgili varsayımlarınızı oluşturunuz.

7. Tablo 3'te verilen gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonların nitel özelliklerini bularak tabloda ilgili yere örnekteki gibi yazınız.

Tablo 3

Nitel Özellik \ Fonksiyon		$f(x) = x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 2(x - 1)$	$k(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$	$m(x) = 3(x + 2) - 4$	$n(x) = -\frac{1}{3}(x - 3) + 1$
Tanım Kümesi		$\mathbb{R}$					
Görüntü Kümesi		$\mathbb{R}$					
İşareti	−	$(-\infty, 0)$					
	+	$(0, \infty)$					
Sıfırı		0					
Artanlık-Azalanlık		Artan					
Maksimum Noktası		Yok					
Minimum Noktası		Yok					
Bire Birliği		Bire bir					

8. Tablo 3'te elde ettiklerinizden yararlanarak $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = a(x \pm r)$ ve $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $v(x) = a(x \pm r) \pm k$ şeklinde tanımlı doğrusal fonksiyonların nitel özellikleri ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

9. 6. maddede oluşturduğunuz varsayımlarla genellemelerinizi karşılaştırarak $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $v(x) = a(x \pm r) \pm k$ şeklinde tanımlı v doğrusal fonksiyonunun nitel özellikleri ile ilgili önermelerinizi oluşturunuz.

10. Aşağıdaki problemi inceleyerek soruları cevaplayınız.

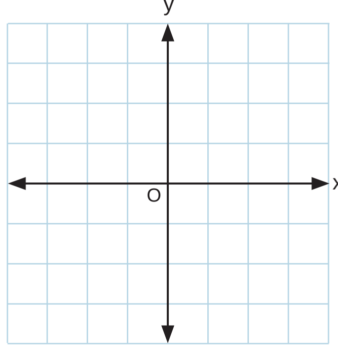
Bir ofiste çalışanlar, sıfır atık projesine destek vermek amacıyla plastik şişe kullanımının önüne geçmek için iki farklı musluğa su arıtma cihazı taktırmıştır. Su arıtma cihazlarından birim zamanda elde edilen su miktarları sabittir. Birinci musluktan dakikada 1 litre, ikinci musluktan dakikada 2 litre arıtılmış su akmaktadır.

Birinci musluk açılarak 19 litrelik bir kaba su doldurulmaya başlanmıştır. Birinci musluk açıldıktan 2 dakika sonra ikinci musluk açılarak aynı hacimde ve başlangıçta içinde 2 litre su bulunan başka bir kaba su doldurulmaya başlanmıştır.



1 ve 2. muslukların doldurduğu kaplardaki su miktarları sırasıyla f ve g fonksiyonlarıyla modellensin.

a) f ve g fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.



b) Gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsillerini oluşturunuz.

c) 2. musluğun 2 dakika sonra açılmasının g fonksiyonuna etkisinin ne olduğunu fonksiyonların grafik ve cebirsel temsillerinden yararlanarak açıklayınız.

ç) 2. musluğun doldurduğu kapta başlangıçta 2 litre su bulunmasının g fonksiyonuna etkisinin ne olduğunu fonksiyonların grafik ve cebirsel temsillerinden yararlanarak açıklayınız.

d) f ve g fonksiyonlarının grafiklerinin eğimleri göz önüne alınırsa hangi kap daha çabuk dolar? Bu durum, fonksiyonların grafik ve cebirsel temsillerini nasıl etkilemiştir? Açıklayınız.

e) f ve g fonksiyonlarının grafiklerinin y eksenini kestiği noktaları ve sıfırlarını bulunuz. Bulduğunuz değerler zamana (dk.) bağlı kaplardaki su miktarı (l) ile ilişkilendirildiğinde ne ifade etmektedir? Açıklayınız.

f) Ulaştığınız önermelerin problemin çözümünde ne tür bir kolaylık sağladığını açıklayınız. Sınıf arkadaşlarınızla saygı çerçevesinde tartışınız.

11. Fonksiyonları temsil eden grafikler ve bu fonksiyonların nitel özellikleri ile ilgili oluşturduğunuz önermelerin doğruluğunu göstermek için matematik yazılımlarından nasıl yararlanılabilir? Sınıfça tartışınız ve aşağıdaki adımları inceleyip kendi önermeleriniz için uygulayınız.

1. adım: **Giriş** bölümüne f(x) = a(x + r) + k yazıp **Enter** tuşuna basınız. Ekranda f fonksiyonunun grafiği ve a, r, k sürgüleri oluşacaktır.

2. adım: Oluşan sürgüleri sağa veya sola hareket ettirerek, f fonksiyonunun grafiğindeki değişimleri inceleyerek önermelerinizi doğrulayınız.

Matematik yazılımı ile ilgili videoya ulaşmak için karekodu okutunuz.



12. Doğrulama yöntemlerinizi kullanışlılık açısından değerlendiriniz.

3. ÖRNEK

Aynı yerde bulunan iki araçtan biri olan B aracı, A aracı hareket ettikten bir süre sonra hareket etmiştir. Sabit hızla hareket eden A ve B araçlarının zamana (sa.) bağlı olarak aldıkları mesafeyi (km) gösteren, uygun aralıkta tanımlı f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsilleri sırasıyla $f(x) = 70x$ ve $g(x) = 130(x - 2)$ şeklindedir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) A ve B aracının hareketlerine ait değişkenleri ve bu değişkenlerin arasındaki ilişkiyi belirleyiniz.

b) f ve g fonksiyonlarının grafiklerini matematik yazılımı yardımıyla çiziniz.

c) f ve g fonksiyonlarını temsil eden doğruların eğimlerini bularak karşılaştırınız. Vardığınız sonuçtan yararlanarak A ve B araçlarının hızları ile ilgili ne söylenebileceğini fonksiyonların grafik temsillerini de dikkate alarak yorumlayınız.

ç) Grafiklerden yararlanarak A ve B araçlarının hangi saatler arasında yan yana geldiğini bulunuz.

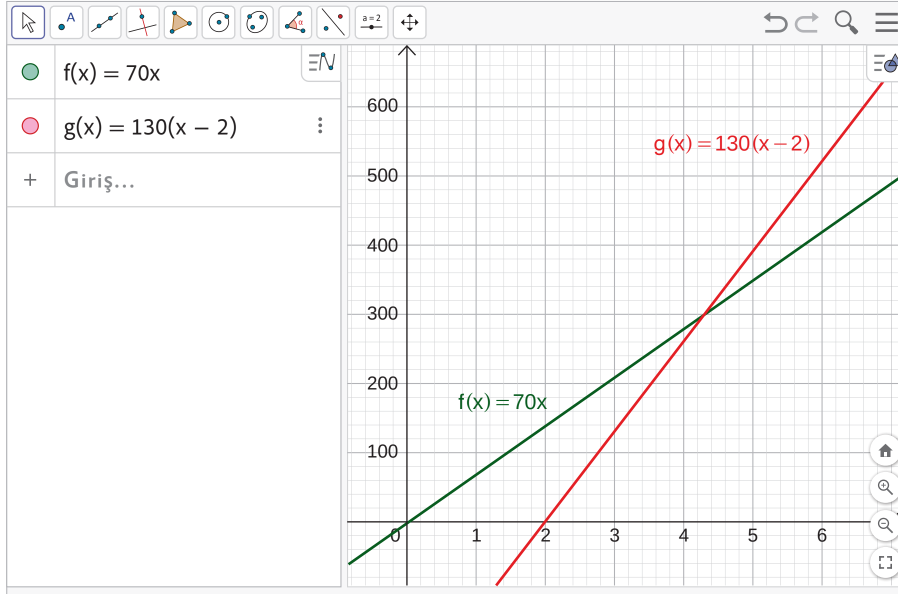
d) f ve g fonksiyonlarının sıfırlarını matematik yazılımı yardımıyla belirleyiniz. Bu noktaların araçların hareketi ile ilgili ne ifade ettiğini yorumlayınız.

e) A aracı hareket ettikten 6 saat sonra araçların aldıkları mesafeleri karşılaştırınız, hangi aracın daha fazla yol aldığını bulunuz.

Çözüm

a) A ve B araçlarının hareketi ile ilgili değişkenler, araçların hareket süresi ve bu süreye bağlı olarak harekete başladıkları andan itibaren aldıkları mesafedir. Hareket ettikleri süre, bağımsız değişken ve süreye bağlı aldıkları mesafe, bağımlı değişkendir. f ve g fonksiyonları değişkenlerin arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir ve fonksiyonların cebirsel temsiline göre ilişkinin doğrusal olduğu söylenebilir.

b) Bilgisayar veya etkileşimli tahtada matematik yazılımı açılarak **Giriş** bölümüne $\mathbf{f(x) = 70x}$ yazılır ve **Enter** tuşuna basılır. Ardından **Giriş** bölümüne $\mathbf{g(x) = 130(x - 2)}$ yazılır ve **Enter** tuşuna basılır. Ekranda sırasıyla f ve g fonksiyonlarını temsil eden doğruların grafikleri çizilecektir (Görsel 1).



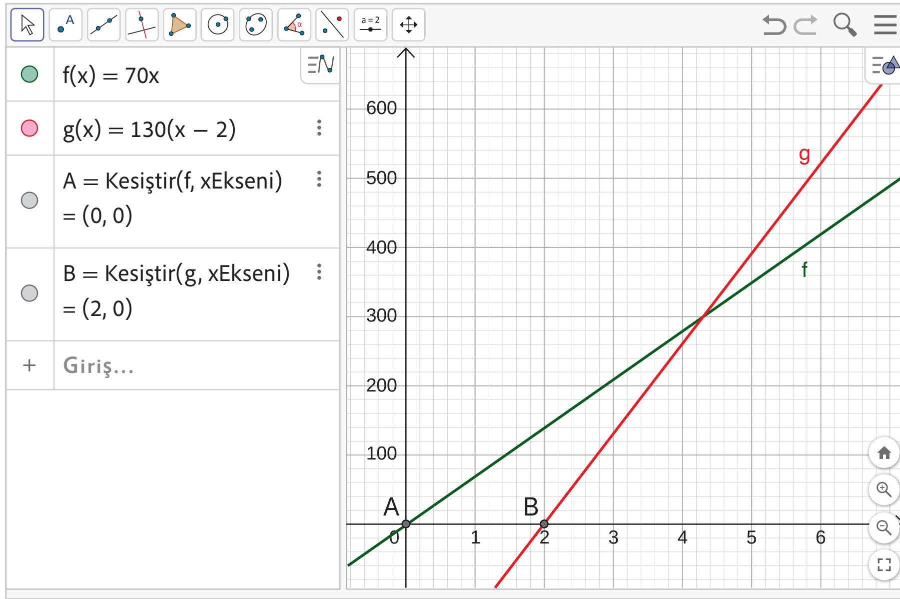
Görsel 1

c) Buna göre B aracına ait g fonksiyonunu temsil eden grafiğin eğimi 130, A aracına ait f fonksiyonunu temsil eden grafiğin eğimi 70'tir. B aracına ait doğrunun eğimi daha büyüktür. Buradan B aracının A aracından daha hızlı olduğu söylenebilir.

ç) Görsel 1 incelendiğinde f ve g fonksiyonlarının temsil ettiği doğruların kesişim noktasının apsis değerinin 4 ile 5 arasında bir değer aldığı görülür. Buna göre A ve B araçları, 4 ile 5. saatler arasındaki bir zamanda yan yana gelmektedir.

d) f ve g fonksiyonlarının grafikleri matematik yazılımı ile çizildikten sonra **Kesiştir** aracı seçilip sırasıyla f doğrusu ve x ekseni işaretlenir. f fonksiyonunu temsil eden doğrunun x eksenini $A(0, 0)$ noktasında kestiği görülür. Benzer şekilde **Kesiştir** aracı seçilip sırasıyla g doğrusu ve x ekseni işaretlenir. g fonksiyonunu temsil eden doğrunun x eksenini $B(2, 0)$ noktasında kestiği görülür (Görsel 2).

Bu durum, B aracının A aracından 2 saat sonra yola çıktığı anlamına gelmektedir.



Görsel 2

e) f ve g fonksiyonlarında $x = 6$ için $f(6) = 70 \cdot 6 = 420$

$$g(6) = 130 \cdot (6 - 2)$$
$$= 130 \cdot 4$$
$$= 520 \text{ olur.}$$

Buradan 6. saatin sonunda A aracının 420 km, B aracının 520 km yol aldığı görülür. 6. saatin sonunda B aracı, A aracından 100 km daha fazla yol almıştır.

Konu ile ilgili çalışma kâğıdına ulaşmak için karekodu okutunuz.



3. Sıra Sizde

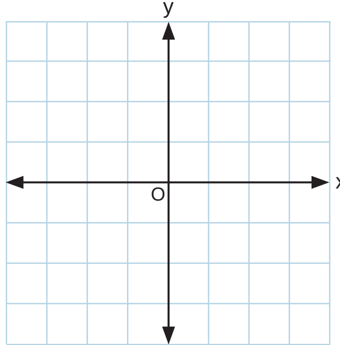
Bir spor salonunda üyelere sunulan kullanım seçenekleri tabloda verilmiştir. Havuz kullanımının sabit ücreti 400 Türk lirasıdır ve havuz kullanımının yanı sıra alınmak istenen egzersiz dersleri ayrıca ücretlendirilmektedir. Farklı seçenekler için ders saatine (x) bağlı ödenecek toplam ücretin (TL) değişimi tabloda verilen doğrusal fonksiyon modellerinin cebirsel temsili ile ifade edilmiştir.

Kullanım Seçeneği	Sabit Ücret (TL)	Ders Saati Ücreti (TL)	Ödenecek Toplam Ücreti İfade Eden Fonksiyonun Cebirsel Temsili
Egzersiz Dersi	-	300	$f(x) = 300x$
Havuz ve Egzersiz Dersi	400	300	$g(x) = 300(x + 1) + 100$
Yıllık Tam Üyelik (Tüm Dersler Dâhil)	10 000	-	$h(x) = 10\,000$

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Spor salonunda üyelere sunulan kullanım seçeneklerini inceleyiniz. Spor salonunun kullanımına ait değişkenleri ve bu değişkenlerin arasındaki ilişkileri tespit ediniz.

b) f, g ve h fonksiyonlarının grafiklerini aynı dik koordinat sisteminde çiziniz.



c) Grafiklerden yararlanarak f, g ve h fonksiyonlarının grafiklerinin eğimlerini bularak karşılaştırınız. Eğimlerle ilgili elde ettiğiniz sonuçları spor salonunun kullanım seçenekleri ile ilişkilendirerek yorumlayınız.

ç) f, g ve h fonksiyonlarının grafiklerinin y eksenini kestiği noktaları ve varsa sıfırını bulunuz. Bu noktaların spor salonunun kullanım seçeneklerine bağlı olarak ücretlendirilmesi ile ilgili neyi ifade ettiğini yorumlayınız.

d) f, g ve h fonksiyonlarının bire birliği, artanlığı veya azalanlığı ile ilgili ne söylenebilir? Ulaştığınız sonuca hangi kanıtlara dayanarak vardığınızı açıklayınız.

e) f, g ve h fonksiyonlarının tanım ve değer aralıklarını bulunuz. Bulduğunuz aralıkları hangi kanıtlara dayanarak oluşturduğunuzu açıklayınız.

f) Hangi kullanım seçeneğini tercih etmenin hangi durumlarda avantajlı olacağını nedenleri ile birlikte açıklayınız.

Performans Görevi

Yakıt Tasarrufu

Bu görevde sizden üç farklı otomobil markasına ait birer araç belirlemeniz, araçların şehir içinde harcadığı ortalama yakıt miktarlarını bularak tablo ile ifade etmeniz, elde ettiğiniz verilerden yararlanarak yolculuğa dolu bir depo ile başlayan ve sabit hızla hareket eden bu üç aracın aldıkları mesafeye (km) bağlı depolarında kalan yakıt miktarlarını (l) gösteren fonksiyonların cebirsel ifadesini yazmanız, cebirsel ifadesini yazdığınız fonksiyonların grafiklerini çizmeniz, elde ettiğiniz tablo ve grafikleri sınıfta sunarak hangi aracın şehir içinde daha ekonomik olduğunu açıklamanız istenmektedir.

Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususa dikkat ediniz.

- Çalışmanın yapılış basamaklarını belirleyiniz.

Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz.

- Belirlediğiniz araç markaları için şehir içi yakıt tüketim miktarlarını not ediniz.
- Elde ettiğiniz yakıt tüketim miktarlarını alınan mesafeye (km) bağlı olarak litre cinsinden ifade ediniz.
- Kilometreye bağlı yakıt miktarını (l) gösteren tabloyu oluşturunuz.
- Araçların aldıkları mesafeye bağlı (km) yakıt miktarlarını (l) gösteren fonksiyonların cebirsel ifadelerini yazınız.
- Cebirsel olarak ifade ettiğiniz fonksiyonların grafiklerini aynı dik koordinat sisteminde çiziniz.
- Tablo ve grafikler yakıt tüketimi açısından ne ifade etmektedir ve hangi araç daha ekonomiktir? Açıklayınız.
- Yakıt tüketimi açısından ekonomik olan araçları tercih etmenin faydaları neler olabilir? Sınıfta arkadaşlarınızla tartışınız.

Görev bitiminde aşağıdaki hususa dikkat ediniz.

- Sınıf içinde oluşturduğunuz tablo ve grafikleri arkadaşlarınıza sunarak paylaşınız.

Projeniz analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik dereceli puanlama anahtarına ulaşmak için karekodu okutunuz.



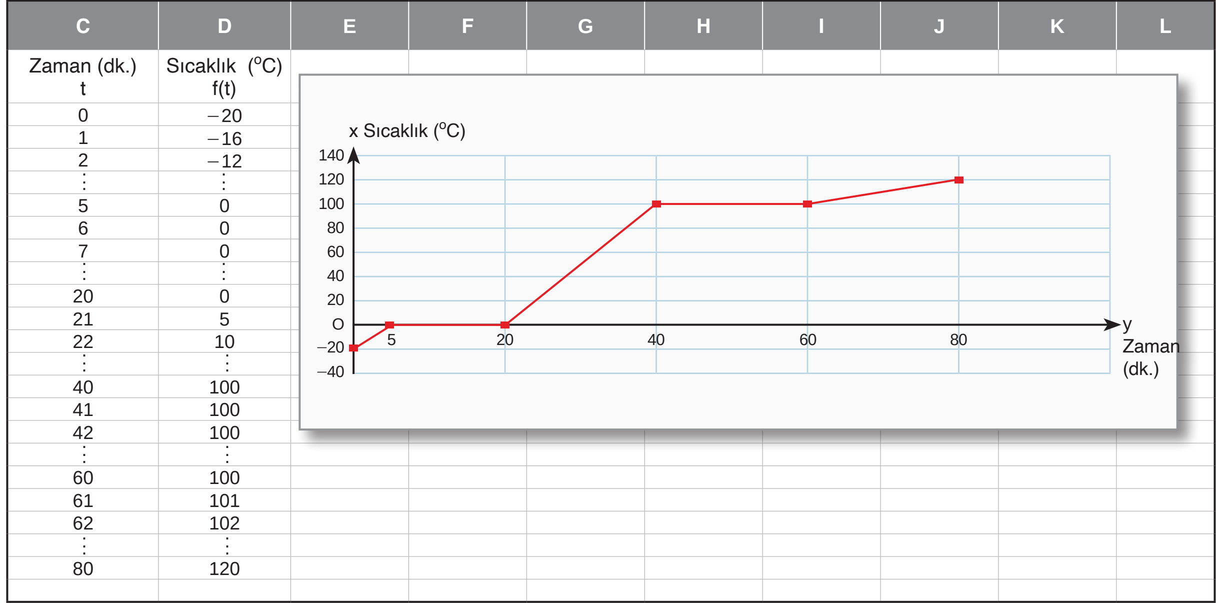
7. Uygulama



Fonksiyonların Parçalı Gösterimi

Verilen bilgileri inceleyerek soruları cevaplayınız.

Aşağıda bir miktar buzun ısıtılarak buhar hâline getirilmesine ait, zamana (dk.) bağlı sıcaklığı (^{o}C) ifade eden f fonksiyonunun elektronik tablo yardımıyla elde edilen grafik temsili verilmiştir.



C	D
Zaman (dk.) t	Sıcaklık (^{o}C) f(t)
0	−20
1	−16
2	−12
⋮	⋮
5	0
6	0
7	0
⋮	⋮
20	0
21	5
22	10
⋮	⋮
40	100
41	100
42	100
⋮	⋮
60	100
61	101
62	102
⋮	⋮
80	120

1. f fonksiyonunun tablo ve grafik temsilinden yararlanarak cebirsel gösterimini nasıl elde edebilirsiniz? f fonksiyonu tek bir cebirsel temsille ifade edilebilir mi? Bu soruya ilişkin varsayımlarınızı oluşturunuz.

2. f fonksiyonunun tablo temsili yardımıyla suyun her bir hâl değişim evresinde dakika başına sıcaklıktaki değişim miktarlarını hesaplayınız. Grafik temsilinden yararlanarak zaman ve sıcaklık aralıklarını elde ediniz ve tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

Suyun Hâli	Dakika Başına Sıcaklıktaki (^{o}C) Değişim Miktarı	Zaman (dk.) Aralığı	Sıcaklık (^{o}C) Aralığı	Suyun Hâl Değişimini Temsil Eden Fonksiyonun Cebirsel Temsili
Buz	4	$[0, 5)$	$[-20, 0)$	$f(t) = 4(t-5)$
Buz ve Su				
Su				
Su ve Buhar				
Buhar				

3. Elde ettiğiniz fonksiyonlar yardımıyla f fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bularak cebirsel temsillerle ifade ediniz. Oluşturduğunuz temsilleri f fonksiyonunun grafik temsili üzerinde gösteriniz.

Tanım kümesi: ....

Görüntü kümesi: ....

$$f(t) = \begin{cases} 4(t-5),\ 0 \leq t < 5 \\ \text{.................................} \\ \text{.................................} \\ \text{.................................} \\ \text{.................................} \end{cases}$$



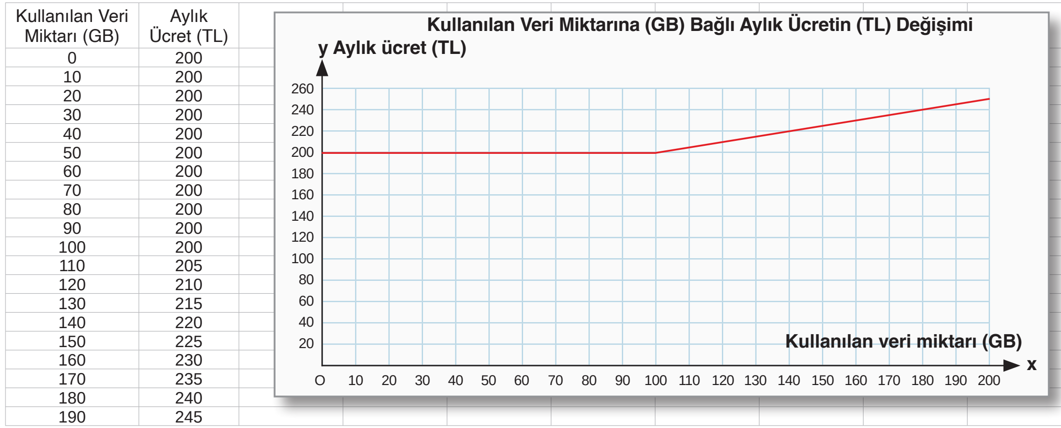
4. Parçalı gösterimli fonksiyonların cebirsel temsillerine dair genellemeler oluşturunuz.

5. Varsayımlarınızla genellemelerinizi karşılaştırarak parçalı gösterimli fonksiyonlar ile ilgili önermeler oluşturunuz.

6. Oluşturduğunuz önermelerin hangi problem durumlarında ve nasıl kullanılabileceğini açıklayınız.

4. ÖRNEK

Bir genel ağ servis sağlayıcısının uyguladığı ücret tarifesi, kullanılan ilk 100 GB (cigabayt) veri için aylık 200 Türk lirası sabit ücret ve her 1 GB fazladan veri için 0,5 Türk lirası olarak düzenlenmiştir. Kullanılan veri miktarına (GB) bağlı aylık ücret (TL), aşağıda elektronik tablo ve fonksiyon grafiğiyle gösterilmiştir.



Kullanılan Veri Miktarı (GB)	Aylık Ücret (TL)
0	200
10	200
20	200
30	200
40	200
50	200
60	200
70	200
80	200
90	200
100	200
110	205
120	210
130	215
140	220
150	225
160	230
170	235
180	240
190	245

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Fonksiyonun tablo ve grafik temsilini inceleyiniz. Kullanılan veri miktarı hangi değeri geçtiğinde fonksiyonun değişim gösterdiğini bulunuz.

b) Fonksiyonun hangi tanım aralıklarında kaç farklı cebirsel temsil ile ifade edilebileceğini açıklayınız.

c) Kullanılan veri miktarına (GB) bağlı olarak aylık ücreti (TL) veren fonksiyonun cebirsel temsilini parçalı gösterimli fonksiyon şeklinde ifade ediniz. Grafik üzerinde gösteriniz.

Çözüm

a) Tablo ve grafik temsiline göre kullanılan veri miktarı 100 GB'ı geçtiğinde fonksiyon, değişim göstermiştir.

b) Kullanılan veri miktarına (GB) bağlı olarak aylık ücreti (TL) ifade eden fonksiyon f olsun. Kullanılan veri miktarı 100 GB'ı geçtiğinde fonksiyon değişim gösterdiğinden f fonksiyonu, $[0, 100]$ ve $(100, \infty)$ nda iki farklı cebirsel temsil ile ifade edilmelidir.

c) Tanım kümeleri $[0, 100]$ ve $(100, \infty)$ olan fonksiyonlar sırasıyla g ve h olsun. $[0, 100]$ nda aylık sabit ücret 200 Türk lirası olduğundan $g(x) = 200$ olur.

100 GB'ın üzerindeki kullanımlarda fazladan kullanılan verinin ücreti $0{,}5 \cdot (x - 100)$ Türk lirası olur. Bu durumda $h(x) = 200 + 0{,}5 \cdot (x - 100)$ bulunur.

Buradan f fonksiyonu, aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f:[0, \infty) \longrightarrow [200, \infty),\ f(x) = \begin{cases} 200, & 0 \le x \le 100 \\ 200 + 0{,}5 \cdot (x - 100), & 100 < x \end{cases}$$

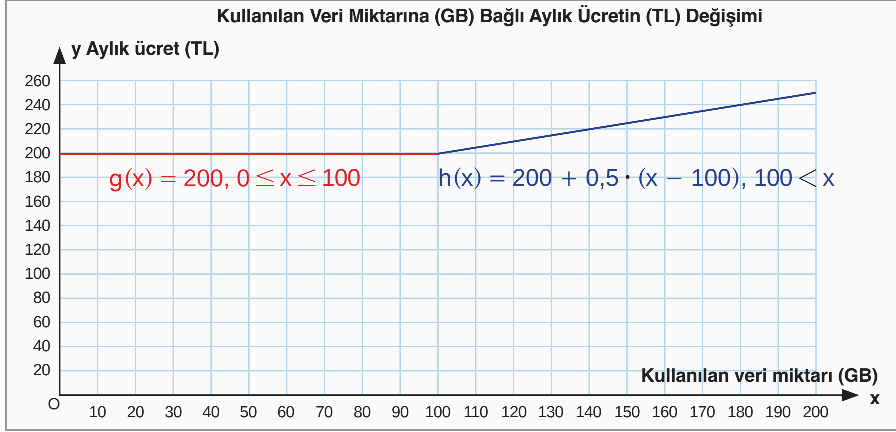
Sabit ücret için kullanılan veri miktarının alabileceği değerlerin kümesi

100 GB veri için sabit ücret

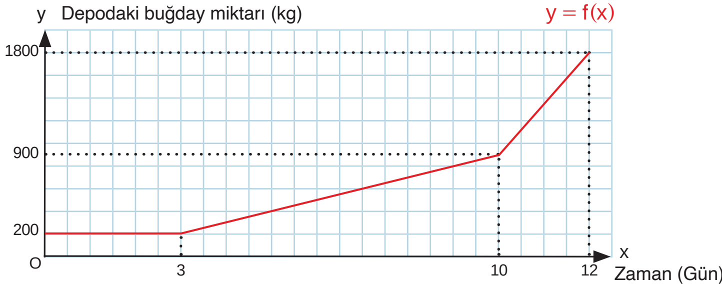
Her 1 GB fazladan veri için 0,5 TL

Fazladan kullanılan veri miktarı

Fazladan kullanılan veri miktarının alabileceği değerlerin kümesi



4. Sıra Sizde



Deposunda 200 kg buğday bulunan bir un fabrikası toplam 1800 kg buğdaya ulaştığında un üretmeye başlayacaktır. Fabrika bünyesinde çalışan mühendis Mehmet Bey, buğday alımı yaparak 12. günün sonunda hedeflediği buğday miktarına ulaşmayı ve üretime başlamayı planlamıştır. Mehmet Bey, zamana bağlı (gün) depodaki buğday miktarını (kg) gösteren f fonksiyonunun grafiğini yandaki gibi oluşturmuştur.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) f fonksiyonunun grafik temsilini inceleyiniz. Fonksiyon tek bir cebirsel gösterim ile ifade edilebilir mi? Açıklayınız.

b) f fonksiyonunun grafik temsili yardımıyla gün başına depodaki buğday miktarını hesaplayınız.

c) f fonksiyonunun cebirsel temsilini parçalı gösterimli fonksiyon biçiminde ifade ediniz. Grafik üzerinde gösteriniz.

Kontrol Noktası



a, r, $k \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere gerçek sayılarda $g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k$ şeklinde tanımlı doğrusal fonksiyonların grafikleri çizilirken aşağıdaki adımlar izlenir.

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ olsun.
- $m(x) = f(x+r)$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunun grafiği çizilirken
  $r \in \mathbb{R}^+$ ise f fonksiyonunun grafiği x ekseni boyunca negatif yönde r birim ötelenir.
  $r \in \mathbb{R}^-$ ise f fonksiyonunun grafiği x ekseni boyunca pozitif yönde $|r|$ birim ötelenir.
- m fonksiyonunun tanım aralığındaki her elemanı a katı ile eşleyen $n(x) = a \cdot f(x \pm r)$ şeklinde tanımlı fonksiyonun grafiği çizilir.
- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k$ şeklinde tanımlı fonksiyonun grafiği çizilirken
  $k \in \mathbb{R}^+$ ise g fonksiyonunun grafiği y ekseni boyunca pozitif yönde k birim ötelenir.
  $k \in \mathbb{R}^-$ ise g fonksiyonunun grafiği y ekseni boyunca negatif yönde $|k|$ birim ötelenir.

a, r, $k \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k$ şeklinde tanımlı g doğrusal fonksiyonu için aşağıdaki sonuçlara varılır.

- g fonksiyonunun en geniş tanım ve görüntü kümesi, gerçek sayılardır.
- $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere g fonksiyonunun sıfırı n olsun $(g(0) = n)$.
- $a > 0$ veya $a < 0$ olmak üzere f fonksiyonunun işaret incelemesi aşağıdaki gibi iki farklı şekilde yapılabilir.

$a > 0$ için

x	$-\infty$	n	∞
g(x)	$-$	0	$+$

veya

$a < 0$ için

x	$-\infty$	n	∞
g(x)	$+$	0	$-$

g fonksiyonunun işareti $a > 0$ için (n, ∞) nda pozitif, $(-\infty, n)$ nda negatiftir.

- $a = 0$ ise $g(x) = k$ biçimindeki g sabit fonksiyonu elde edilir.
- $a \neq 0$ olduğunda g fonksiyonu bire birdir.
- $a > 0$ için g fonksiyonu artandır.
- $a < 0$ için g fonksiyonu azalandır.



Alıştırmalar

1. Aşağıda cebirsel gösterimi verilen, gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonların grafiklerini $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ şeklinde tanımlı f doğrusal referans fonksiyonunun grafiğine uygun dönüşümleri yaparak çiziniz.

   a) $g(x) = -x$

   b) $h(x) = 3x - 4$

   c) $m(x) = 2\left(x - \frac{1}{3}\right)$

   ç) $n(x) = -4(x + 1) + \sqrt{3}$

2. Arzu Hanım, aracının lastiğini 32 psi basıncı seçerek şişirmiştir. Sonrasında lastik basıncının her gün 2 psi düştüğünü fark etmiştir. Basıncı 32 psi'den 14 psi'ye düşene kadar lastiğe müdahale etmemiştir.

   Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

   a) Zamana (gün) bağlı lastik basıncını (psi) ifade eden doğrusal fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini bularak cebirsel gösterimini yazınız.

   b) Cebirsel gösterimini yazdığınız fonksiyonun grafiğini $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ **şeklinde tanımlı f fonksiyonunun grafiğine uygun dönüşümleri yaparak çiziniz.**

3. Okul çantası üreten bir şirketin günlük sabit üretim maliyeti 40 000 Türk lirası, her bir okul çantasını üretme maliyeti ise 120 Türk lirasıdır. x adet okul çantası üretildiğinde günlük toplam maliyet, [0, 50]nda tanımlı m doğrusal fonksiyonu ile ifade ediliyor.

   Buna göre m fonksiyonunu cebirsel ve grafik temsiliyle ifade ediniz.

4. Bir ortamda bulunan belirli bir maddenin kütle veya hacminin maddenin içinde bulunduğu ortamın kütle veya hacmine oranına derişim denir. Bir ilaç, vücutta belirli bir süre boyunca etkili olup zamanla derişimini kaybetmektedir. Zamana (dk.) bağlı olarak ilacın vücuttaki derişim miktarını (mol/kg) modelleyen fonksiyon $f:[0, 40] \rightarrow [0, 8]$, $f(x) = -0{,}2x + 8$ şeklindedir.
Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

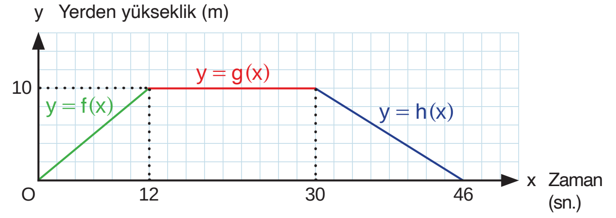
a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) İlacın vücuttaki derişim miktarının (mol/kg) zamana (dk.) bağlı olarak nasıl değiştiğini f fonksiyonunun grafiği yardımıyla açıklayınız.

c) Vücuttaki derişim miktarı sıfıra eşit olduğunda ilacın etkisi tamamen kaybolmaktadır.

İlacın etkisinin tamamen kaybolması için gereken zamanın kaç dakika olduğunu bulunuz.

5. Aşağıda bir hava aracının kalkış, seyir ve iniş süreçlerinde zamana (sn.) bağlı olarak yerden yüksekliğini (m) ifade eden f, g ve h doğrusal fonksiyonlarının grafik temsili verilmiştir.



Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Hava aracının yüksekliğindeki değişimin zamandaki değişime oranlarını kalkış, seyir ve iniş süreçleri için ayrı ayrı hesaplayınız.

b) İniş sürecinin kalkış sürecine göre daha uzun sürmesi f ve h fonksiyonlarının hangi nitel özellikleri ile açıklanabilir?

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe ulaşmak için karekodu okutunuz.



Konu ile ilgili çalışma kâğıdına ulaşmak için karekodu okutunuz.



2.2. GERÇEK SAYILARDA TANIMLI MUTLAK DEĞER FONKSİYONLARI VE NİTEL ÖZELLİKLERİ

Konuya Başlarken



Banka hesaplarında bulunan para miktarındaki değişimler; telefon, bilgisayar gibi araçlar yardımıyla çevrim içi görüntülenebilmektedir. Yandaki görselde bir bankacılık uygulaması kullanan şahsın hesaplarında son bir ayda gerçekleşen hesap hareketlerinin ekran görüntüsü verilmiştir. Örneğin 14 Mart 2024'te hesaptan 16 151,69 Türk lirası gönderilmiş ve bu durum ekranda −16 151,69 Türk lirası olarak ifade edilmiştir. 8 Mart 2024'te hesaba 225 Türk lirası gelmiş ve bu durum ekranda 225,00 Türk lirası olarak gösterilmiştir.

Buna göre aşağıdaki sorularla ilgili fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

1. Hesap hareketlerinin ekran görüntüsünde yazan sayıların pozitif veya negatif olmasına karşın para miktarının pozitif olması matematikteki hangi kavramla ilişkilendirilebilir?
2. Hesap hareketlerinin ekran görüntüsünde yazan sayıların x olması durumunda hesaba gelen veya hesaptan gönderilen para miktarı cebirsel olarak nasıl ifade edilebilir?
3. Hesap hareketlerinin ekran görüntüsünde yazan sayıların bağımsız, para miktarının bağımlı değişken olması hâlinde ifade edilecek fonksiyonun cebirsel temsilinin ne olacağını gerekçelerinizle açıklayınız.

Hesap Hareketleri

İşlem Kategorisi: Tümü — Tarih Aralığı: Son 1 Ay

Tarih	İşlem	Tutar
MAR 14 2024	Kredi Kartı Borç Ödeme	−16 151,69 TL Tekrarla
MAR 08 2024	Para Transferi	225,00 TL
MAR 05 2024	Maaş Ödemesi	37 447,37 TL
MAR 01 2024	Para Transferi	−13 000,00 TL Tekrarla
MAR 01 2024	Para Transferi	−1 001,67 TL Tekrarla
ŞUB 29 2024	Para Transferi	−200,00 TL Tekrarla

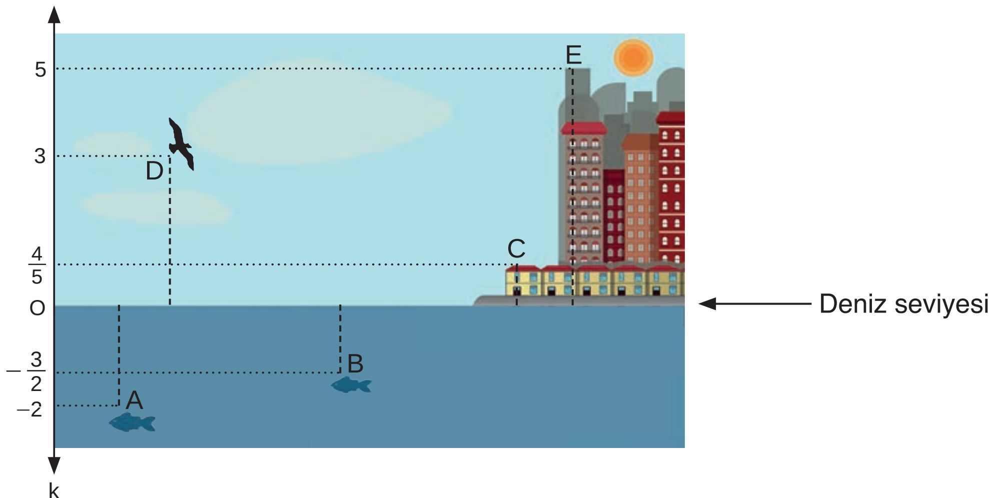
8. Uygulama



Gerçek Sayılarda $g(x) = \pm|x|$ Şeklinde Tanımlı Mutlak Değer Fonksiyonlarının Nitel Özellikleri

Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. Aşağıdaki görselde deniz seviyesinin altında ve üstünde yer alan A, B, C, D ve E noktaları gösterilmiştir.



a) Görselde verilen noktaların k doğrusuna karşılık gelen sayı değerleri ile deniz seviyesine olan uzaklıklarını gösteren Tablo 1'i örnekteki gibi doldurunuz.

Tablo 1

Nokta	A	B	C	D	E
Noktanın Konumunun k Doğrusunda Karşılık Geldiği Sayı	−2				
Noktanın Deniz Seviyesine Olan Uzaklığı (birim)	2				

b) Noktanın konumunun k doğrusunda karşılık geldiği sayılar bağımsız değişken, aynı noktanın deniz seviyesine olan mesafesi bağımlı değişken olsun. Tablo 1'deki değerlerden yararlanarak görsel üzerinde alınan herhangi bir x değerine karşılık gelen bağımsız değişkenlerin cebirsel temsilini yazınız.

c) Bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki bu ilişkiyi gerçek sayılarda tanımlı g fonksiyonu olarak ifade ediniz.

2. Oluşturduğunuz g fonksiyonuna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Bağımsız değişkenin hangi değeri için bağımlı değişkenin sıfıra eşit olduğunu bulunuz.

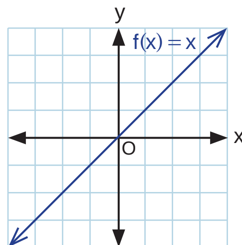
b) Bağımsız değişkenin hangi aralıktaki değerleri için bağımlı değişkenin aldığı değerlerin negatif veya pozitif olduğunu bulunuz.

c) Bağımlı değişkenin alabileceği en büyük veya en küçük değerin kaç olduğunu bulunuz.

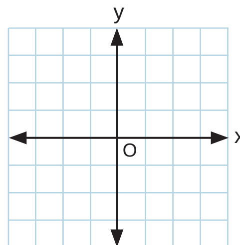
ç) Bağımsız değişkenin aldığı değerler artarken g fonksiyonunun aldığı değerlerin nasıl değiştiğini belirleyiniz.

d) Bağımsız değişkenin aldığı iki farklı değer için g fonksiyonunun aldığı değerler birbirinden farklı mıdır? Bu durumun bağımsız değişkenin alabileceği tüm değerler için geçerli olup olmadığını açıklayınız.

e) Grafik 1 ve elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak gerçek sayılarda $g(x) = |x|$ şeklinde tanımlı fonksiyonun grafiğini Grafik 2 üzerinde gösteriniz.



Grafik 1



Grafik 2

f) f ve g fonksiyonlarının cebirsel ve grafiksel benzerliklerini, farklılıklarını gözlemleyiniz.

g) Gözlemlerinizden yola çıkarak g fonksiyonunun nitel özelliklerini tespit ediniz ve Tablo 2’yi doldurunuz.

Tablo 2

Fonksiyonun Nitel Özellikleri	$f(x) = x$	$g(x) = \|x\|$
En Geniş Tanım Kümesi		
Görüntü Kümesi		
Fonksiyonun Sıfırı		
Fonksiyonun İşareti		
Maksimum Nokta		
Minimum Nokta		
Bire Birliği		
Artan veya Azalan Olduğu Aralıklar		

ğ) Elde ettiğiniz nitel özelliklerden yararlanarak g mutlak değer fonksiyonunun parçalı gösterimine dair çıkarımlarınızı açıklayınız.

2. $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$ şeklinde tanımlı fonksiyonda mutlak değerin katsayısı değiştirilerek gerçek sayılarda $h(x) = -|x|$ şeklinde tanımlı mutlak değer fonksiyonu oluşturuluyor. h fonksiyonuna göre

a) Bağımsız değişkenin hangi değeri için bağımlı değişkenin sıfıra eşit olduğunu bulunuz.

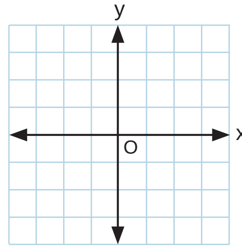
b) Bağımsız değişkenin hangi aralıktaki değerleri için bağımlı değişkenin aldığı değerlerin negatif veya pozitif olduğunu bulunuz.

c) Bağımlı değişkenin alabileceği en büyük veya en küçük değerin kaç olduğunu bulunuz.

ç) Bağımsız değişkenin aldığı değerler artarken h fonksiyonunun aldığı değerlerin nasıl değiştiğini belirleyiniz.

d) Bağımsız değişkenin aldığı iki farklı değer için h fonksiyonunun aldığı değerler birbirinden farklı mıdır? Bu durumun bağımsız değişkenin alabileceği tüm değerler için geçerli olup olmadığını açıklayınız.

e) Grafik 1 ve elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak gerçek sayılarda $h(x) = -|x|$ şeklinde tanımlı mutlak değer fonksiyonunun grafiğini Grafik 3 üzerinde gösteriniz.



Grafik 3

f) f ve h fonksiyonlarının cebirsel ve grafiksel benzerliklerini, farklılıklarını gözlemleyiniz.

g) Gözlemlerinizden yola çıkarak h fonksiyonunun nitel özelliklerini tespit ediniz ve Tablo 3'ü doldurunuz.

Tablo 3

Fonksiyonun Nitel Özellikleri	$f(x) = x$	$h(x) = -\|x\|$
En Geniş Tanım Kümesi		
Görüntü Kümesi		
Fonksiyonun Sıfırı		
Fonksiyonun İşareti		
Maksimum Nokta		
Minimum Nokta		
Bire Birliği		
Artan veya Azalan Olduğu Aralıklar		

ğ) Elde ettiğiniz nitel özelliklerden yararlanarak h mutlak değer fonksiyonunun parçalı gösterimine dair çıkarımlarınızı açıklayınız.



Derecelendirme ölçeğine ulaşmak için karekodu okutunuz.

Araştırma Ödevi

Aşağıda verilen adımları gerçekleştirerek araştırma ödevini zamanında ve eksiksiz olarak tamamlayınız.

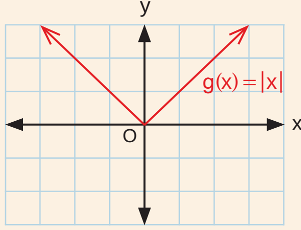
- Farklı alanlarda mutlak değer fonksiyonu yardımıyla ifade edilebilen gerçek yaşam durumlarını araştırınız.
- Belirlediğiniz gerçek yaşam durumuna uygun bağımlı ve bağımsız değişkenleri içeren bir tablo oluşturunuz.
- Tablodaki veriler yardımıyla fonksiyonun cebirsel temsilini oluşturup grafiğini çiziniz.
- Gerçek yaşam durumunu yansıtması amacıyla oluşturduğunuz fonksiyonun cebirsel temsili için uygun tanım ve değer aralıkları belirleyiniz.
- Yaptığınız çalışmanın tüm aşamalarını içeren bir rapor hazırlayıp arkadaşlarınıza sununuz.

Çalışmanız derecelendirme ölçeği ile değerlendirilecektir.

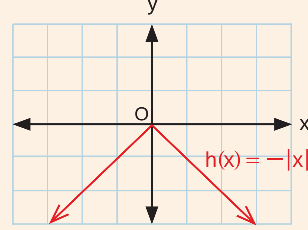
Kontrol Noktası 

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunun işareti $x < 0$ için negatif, $x > 0$ için pozitiftir. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = |x|$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun işareti $x < 0$ ve $x > 0$ için pozitif, $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -|x|$ şeklinde tanımlı h fonksiyonunun işareti $x < 0$ ve $x > 0$ için negatiftir. Buradan f fonksiyonunun işaret tablosundan yararlanılarak g ve h fonksiyonlarının işaret tablosu aşağıdaki gibi oluşturulur.

x	$-\infty$	0	∞
$f(x) = x$	$-$	0	$+$
$g(x) = \|x\|$	$+$	0	$+$
$h(x) = -\|x\|$	$-$	0	$-$



***Grafik 2.5:** g fonksiyonunun grafik temsili*



***Grafik 2.6:** h fonksiyonunun grafik temsili*

Grafik 2.5 ve 2.6 incelendiğinde g ve h fonksiyonlarının parçalı gösterimli fonksiyonlar olduğu görülür. Buradan g ve h fonksiyonları iki farklı cebirsel temsil kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$g(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

9. Uygulama 

Gerçek Sayılarda $g(x) = \pm|ax + b|$ Şeklinde Tanımlı Mutlak Değer Fonksiyonlarının Cebirsel ve Grafiksel Temsili

Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

Türkiye Cumhuriyeti Sağlık Bakanlığının verilerine göre sağlıklı bir bireyin vücut sıcaklığı için ortalama değer 36,5 °C olup vücut sıcaklığı, 35,7 °C ile 37,5 °C arasında değerler alabilmektedir.

Aşağıdaki tabloda sağlıklı bir bireyin gün boyunca farklı zamanlarda ölçülen vücut sıcaklığı değerleri ve ölçülen vücut sıcaklığı değerlerinin ortalamadan sapma miktarları verilmiştir.

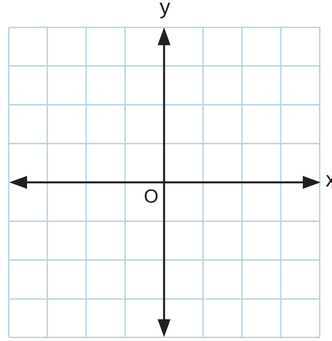
Ölçülen Vücut Sıcaklığı (°C)	Ölçülen Vücut Sıcaklığının Ortalama Sıcaklıktan Sapma Miktarı (°C)
36,2	$\|36,2 - 36,5\| = \|-0,3\| = 0,3$
36,4	$\|36,4 - 36,5\| = \|-0,1\| = 0,1$
37	$\|37 - 36,5\| = \|0,5\| = 0,5$
36,8	$\|36,8 - 36,5\| = \|0,3\| = 0,3$
36,5	$\|36,5 - 36,5\| = \|0\| = 0$

1. a) Ölçülen vücut sıcaklığına bağlı ortalamadan sapma miktarının bağımlı ve bağımsız değişkenlerini sözel olarak ifade ediniz.

b) Bağımlı ve bağımsız değişkenler hangi değerleri alabilir? Aralık şeklinde ifade ediniz.

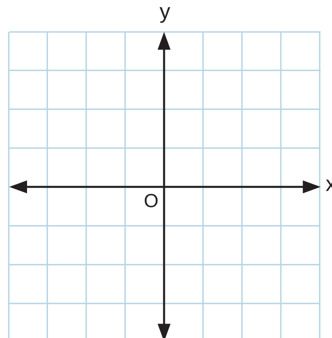
c) Sağlıklı bir bireyin vücut sıcaklığına bağlı (x) ortalamadan sapma miktarını ifade eden g fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

ç) Elde ettiğiniz sonuçlardan yararlanarak g fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



d) g fonksiyonunun cebirsel temsili, parçalı gösterim şeklinde ifade edilebilir mi? Gerekçelerinizle açıklayınız.

2. g fonksiyonunun cebirsel temsilinin -1 ile çarpılmasıyla elde edilen fonksiyon h olsun. Gerçek sayılarda tanımlı h fonksiyonunun cebirsel temsilini yazarak grafiğini çiziniz.



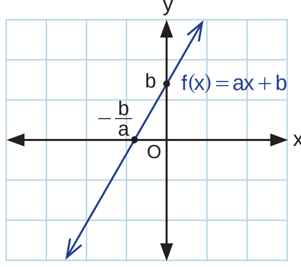
10. Uygulama



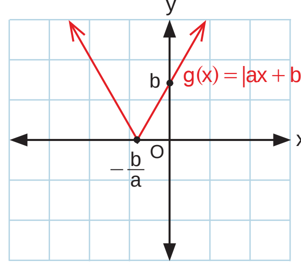
Gerçek Sayılarda $g(x) = \pm|ax + b|$ Şeklinde Tanımlı Mutlak Değer Fonksiyonlarının Nitel Özellikleri

Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

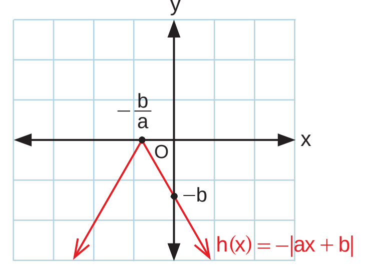
$a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere gerçek sayılarda $f(x) = ax + b$, $g(x) = |ax + b|$ ve $h(x) = -|ax + b|$ şeklinde tanımlı fonksiyonların grafik temsilleri verilmiştir (Grafik 1, Grafik 2 ve Grafik 3).



Grafik 1



Grafik 2



Grafik 3

1. a) f ve g fonksiyonlarının cebirsel ve grafiksel benzerliklerini, farklılıklarını gözlemleyiniz.

b) f ve h fonksiyonlarının cebirsel ve grafiksel benzerliklerini, farklılıklarını gözlemleyiniz.

2. Gözlemlerinizden yola çıkarak f, g ve h fonksiyonlarının nitel özelliklerini tespit ediniz. Tabloyu doldurunuz.

Fonksiyonun Nitel Özellikleri	**$f(x) = ax + b$**	**$g(x) = \|ax + b\|$**	**$h(x) = -\|ax + b\|$**
En Geniş Tanım Kümesi			
Görüntü Kümesi			
Fonksiyonun Sıfırı			
Fonksiyonun İşareti			
Maksimum Nokta			
Minimum Nokta			
Bire Birliği			
Artan veya Azalan Olduğu Aralıklar			

3. Elde ettiğiniz nitel özelliklerden yararlanarak g ve h mutlak değer fonksiyonlarının parçalı gösterimine dair çıkarımlarınızı açıklayınız.

5. ÖRNEK

Bir bölgede nisan ayına ait sıcaklık değerleri araştırılmış ve aşağıdaki bilgilere ulaşılmıştır. Farklı günlerde sıcaklık ölçümü yapılarak tablodaki veriler elde edilmiştir.

- Aylık ortalama sıcaklık 20 °C'tur.
- Ölçülen sıcaklığın ortalama sıcaklıktan sapma miktarı en fazla 4 °C'tur.

Günler	Ölçülen Sıcaklık (°C)	Ölçülen Sıcaklıktan Ortalama Sıcaklığın Çıkarılmasıyla Elde Edilen Fark	Sapma Miktarı (°C)
1	16	$16 - 20 = -4$	4
2	18,2	$18{,}2 - 20 = -1{,}8$	1,8
3	19,5	$19{,}5 - 20 = -0{,}5$	0,5
4	20	$20 - 20 = 0$	0
5	21	$21 - 20 = 1$	1
6	21,8	$21{,}8 - 20 = 1{,}8$	1,8
7	23	$23 - 20 = 3$	3
8	24	$24 - 20 = 4$	4

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Ölçülen sıcaklığa (°C) bağlı sapma miktarını (°C) veren fonksiyon g olsun. g fonksiyonunu parçalı gösterimli fonksiyon biçiminde ifade ediniz.

b) Parçalı gösterimden yararlanarak g fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

c) Ölçülen sıcaklık değeri ile ortalama sıcaklık değerinin birbirine eşit olması f fonksiyonunun hangi nitel özelliği ile ilgilidir? Gerekçelerinizle açıklayınız.

ç) Sapma miktarları aynı olan farklı sıcaklık değerleri var mıdır? Oluşturulan fonksiyon yardımıyla açıklayınız.

d) Sapma miktarının <u>en az</u> ve <u>en fazla</u> olduğu anlarda hava sıcaklığının kaç °C ölçüldüğünü bularak bu durumun fonksiyonun hangi nitel özelliği ile ilgili olduğunu açıklayınız.

Çözüm

a) Ölçülen sıcaklık değerleri, g fonksiyonunun tanım kümesini temsil eder. x in alabileceği en küçük değer 20 °C − 4 °C = 16 °C, en büyük değer 20 °C + 4 °C = 24 °C olduğundan fonksiyonun tanım kümesi $[16, 24]$ olur. Sapma miktarının alabileceği değerler, g fonksiyonunun görüntü kümesini temsil eder. Sapma miktarı en fazla 4 °C olduğundan fonksiyonun görüntü kümesi $[0, 4]$ olur. Sapma miktarı, ölçülen ve ortalama sıcaklık değerleri arasındaki farkın mutlak değeri alınarak elde edilmiştir. Buradan g fonksiyonunun cebirsel temsili $g: [16, 24] \longrightarrow [0, 4]$, $g(x) = |x - 20|$ olarak bulunur.

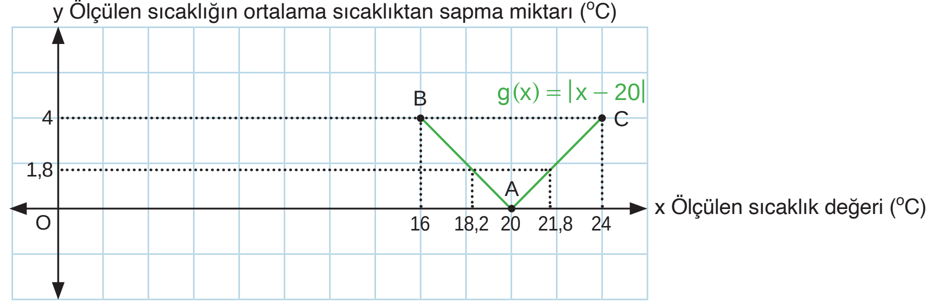
$x \in [16, 20)$ için $g(x) = -x + 20$

$x \in [20, 24]$ için $g(x) = x - 20$ olduğundan g fonksiyonunun parçalı gösterimi aşağıdaki gibi olur.

$$g(x) = \begin{cases} -x + 20, & 16 \le x < 20 \\ x - 20, & 20 \le x \le 24 \end{cases}$$



b) g fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir.



c) Ölçülen sıcaklık ve ortalama sıcaklık değerleri aynı olduğunda sapma miktarı $|20-20| = 0$ bulunur. $g(x) = 0$ için $x = 20$ olduğundan ölçülen sıcaklık ve ortalama sıcaklık değerlerinin eşit olması fonksiyonun sıfırı ile ilgilidir.

ç) Sıcaklığın 18,2 °C ve 21,8 °C ölçüldüğü günlerde sapma miktarı sırasıyla $|18{,}2-20| = |-1{,}8| = 1{,}8$ °C ve $|21{,}8-20| = |1{,}8| = 1{,}8$ °C olur.
Ölçülen sıcaklığın farklı değerleri için sapma miktarları aynıdır. Buradan g fonksiyonunun bire bir olmadığı görülür.

d) Sapma miktarının en az ve en fazla olduğu anlarda ölçülen sıcaklık değerleri fonksiyonun maksimum ve minimum noktaları ile ilgilidir.
Grafik incelendiğinde g fonksiyonunun minimum noktası $A(20, 0)$, maksimum noktaları $B(16, 4)$ ve $C(24, 4)$ olarak görülmektedir. Buradan minimum noktanın apsis değeri olan 20 sayısı, sapma miktarının en az olduğu anda ölçülen sıcaklık değerini; maksimum noktaların apsis değerleri olan 16 ve 24 sayıları, sapma miktarının en fazla olduğu anlarda ölçülen sıcaklık değerlerini temsil eder.

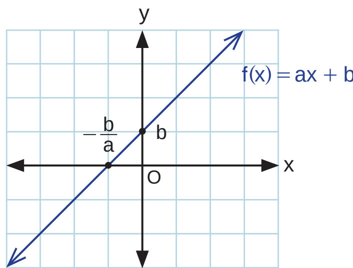
Gerçek Sayılarda $f(x)=\pm|ax + b|\pm c$ Şeklinde Tanımlı Mutlak Değer Fonksiyonlarının Grafikleri

11. Uygulama

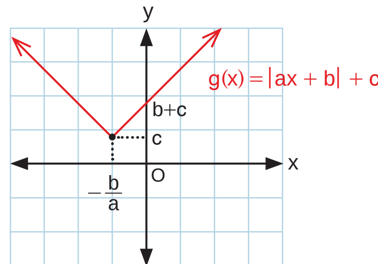
Gerçek Sayılarda $f(x) = \pm|ax+b| \pm c \; (a \neq 0)$ Şeklinde Tanımlı Mutlak Değer Fonksiyonlarının Nitel Özellikleri

Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

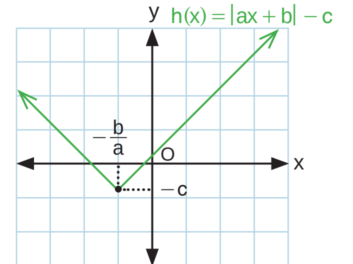
1. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere gerçek sayılarda $f(x) = ax + b$, $g(x) = |ax + b| + c$ ve $h(x) = |ax + b| - c$ şeklinde tanımlı fonksiyonların grafik temsilleri verilmiştir (Grafik 1, Grafik 2 ve Grafik 3).



Grafik 1



Grafik 2



Grafik 3

a) f, g ve h fonksiyonlarının cebirsel ve grafik gösterimlerini inceleyiniz. f ile g, f ile h fonksiyonları arasındaki benzerlikleri veya farklılıkları gözlemleyiniz.

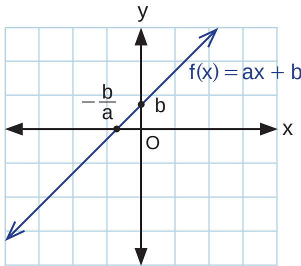
b) Gözlemlerinizden yola çıkarak f, g ve h fonksiyonlarının nitel özelliklerini tespit ediniz. Tablo 1'i doldurunuz.

Tablo 1

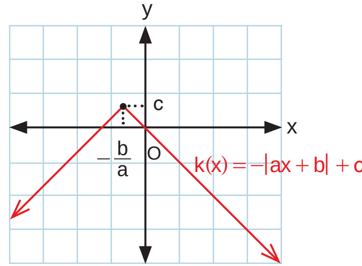
Fonksiyonun Nitel Özellikleri	$f(x) = ax + b$	$g(x) = \|ax + b\| + c$	$h(x) = \|ax + b\| - c$
En Geniş Tanım Kümesi			
Görüntü Kümesi			
Fonksiyonun Sıfırı			
Fonksiyonun İşareti			
Maksimum Nokta			
Minimum Nokta			
Bire Birliği			
Artan veya Azalan Olduğu Aralıklar			

c) Elde ettiğiniz nitel özelliklerden yararlanarak g ve h mutlak değer fonksiyonlarının parçalı gösterimine dair çıkarımlarınızı açıklayınız.

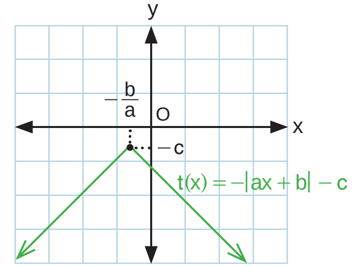
2. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere gerçek sayılarda $f(x) = ax + b$, $k(x) = -|ax + b| + c$ ve $t(x) = -|ax + b| - c$ şeklinde tanımlı fonksiyonların grafik temsilleri verilmiştir (Grafik 4, Grafik 5 ve Grafik 6).



Grafik 4



Grafik 5



Grafik 6

a) f, k ve t fonksiyonlarının cebirsel ve grafik gösterimlerini inceleyiniz. f ile k, f ile t fonksiyonları arasındaki benzerlikleri veya farklılıkları gözlemleyiniz.

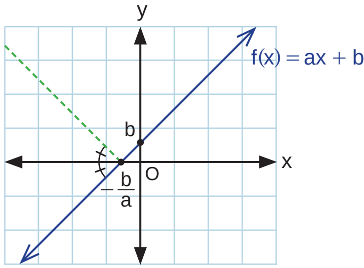
b) Gözlemlerinizden yola çıkarak f, k ve t fonksiyonlarının nitel özelliklerini tespit ediniz. Tablo 2'yi doldurunuz.

Tablo 2

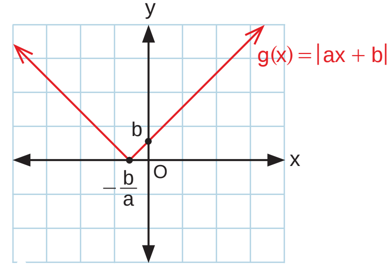
Fonksiyonun Nitel Özellikleri	$f(x) = ax + b$	$k(x) = -\|ax + b\| + c$	$t(x) = -\|ax + b\| - c$
En Geniş Tanım Kümesi			
Görüntü Kümesi			
Fonksiyonun Sıfırı			
Fonksiyonun İşareti			
Maksimum Nokta			
Minimum Nokta			
Bire Birliği			
Artan veya Azalan Olduğu Aralıklar			

c) Elde ettiğiniz nitel özelliklerden yararlanarak k ve t mutlak değer fonksiyonlarının parçalı gösterimine dair çıkarımlarınızı açıklayınız.

Gerçek sayılarda $g(x) = |ax + b|$ ve $h(x) = -|ax + b|$ şeklinde tanımlı mutlak değer fonksiyonlarının grafikleri, gerçek sayılarda $f(x) = ax + b$ şeklinde tanımlı doğrusal fonksiyon grafiğinden yararlanılarak çizilebilir. Bunun için önce f fonksiyonunun grafiği çizilir (Grafik 2.7). Ardından f fonksiyonunun grafiği üzerinde f nin işaretinin negatif olduğu kısmın x eksenine göre yansımasının alınmasıyla g fonksiyonunun grafik temsili elde edilir (Grafik 2.8).

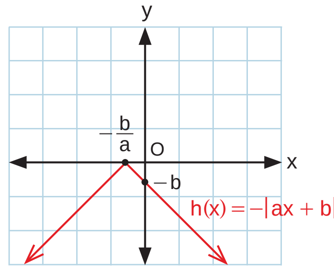


Grafik 2.7: *f fonksiyonunun grafik temsili*
($a, b \in \mathbb{R}^+$)



Grafik 2.8: *g fonksiyonunun grafik temsili*
($a, b \in \mathbb{R}^+$)

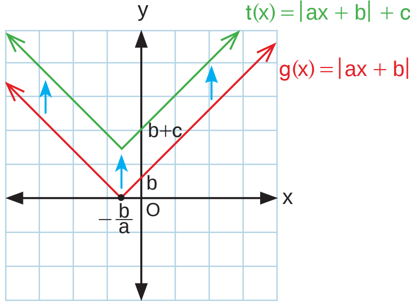
h fonksiyonunun grafiği, g fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre yansımasının alınmasıyla elde edilir (Grafik 2.9).



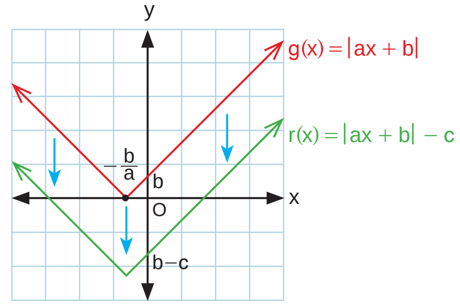
Grafik 2.9: *h fonksiyonunun grafik temsili*
($a, b \in \mathbb{R}^+$)

Gerçek sayılarda $t(x) = |ax + b| + c$ ve $r(x) = |ax + b| - c$ $(a, b, c \in \mathbb{R}^+)$ şeklinde tanımlı fonksiyonların grafikleri, gerçek sayılarda $g(x) = |ax + b|$ şeklinde tanımlı fonksiyonların grafiklerinden yararlanılarak çizilebilir.

t fonksiyonunun grafiği, g fonksiyonunun grafiği y ekseni boyunca pozitif yönde c birim ötelenerek elde edilir (Grafik 2.10). r fonksiyonunun grafiği, g fonksiyonunun grafiği y ekseni boyunca negatif yönde $|c|$ birim ötelenerek elde edilir (Grafik 2.11). Grafik 2.11'de $b < c$ olduğundan r fonksiyonunun grafiğinin y eksenini kestiği noktanın ordinat değeri negatiftir. $b > c$ için r fonksiyonunun grafiğinin y eksenini kestiği noktanın ordinat değerinin pozitif olacağına dikkat ediniz.



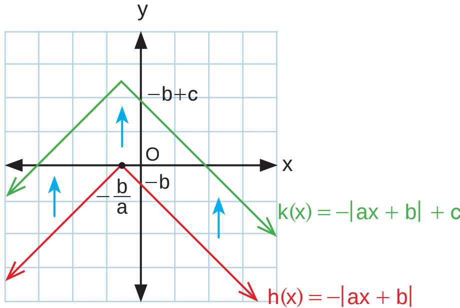
***Grafik 2.10:** t fonksiyonunun grafik temsili* *(a, b, c $\in \mathbb{R}^+$)*



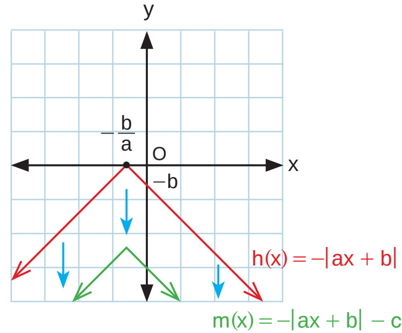
***Grafik 2.11:** r fonksiyonunun grafik temsili* *(a, b, c $\in \mathbb{R}^+$)*

Gerçek sayılarda $k(x) = -|ax + b| + c$ ve $m(x) = -|ax + b| - c$ $(c \in \mathbb{R}^+)$ şeklinde tanımlı fonksiyonların grafikleri, gerçek sayılarda $h(x) = -|ax + b|$ şeklinde tanımlı fonksiyonların grafiklerinden faydalanılarak çizilebilir.

k fonksiyonunun grafiği, h fonksiyonunun grafiği y ekseni boyunca pozitif yönde c birim ötelenerek elde edilir (Grafik 2.12). m fonksiyonunun grafiği, h fonksiyonunun grafiği y ekseni boyunca negatif yönde $|c|$ birim ötelenerek elde edilir (Grafik 2.13).



***Grafik 2.12:** k fonksiyonunun grafik temsili* *(a, b, c $\in \mathbb{R}^+$)*



***Grafik 2.13:** m fonksiyonunun grafik temsili* *(a, b, c $\in \mathbb{R}^+$)*

6. ÖRNEK

Atatürk Lisesi Dayanışma ve Yardımlaşma Kulübü öğrencileri bir proje kapsamında sokak hayvanları için gönüllü öğrencilerden kedi ve köpek maması toplamaktadır. Ellerinde x kg mama bulunan öğrencilerin 3 günlük çalışma sonucunda topladıkları mama miktarları ile ilgili bilgiler tabloda verilmiştir.

Günler	Toplanan Mama Miktarı (kg)
1. gün	Ellerinde bulunan mama miktarının 2 katı kadar
2. gün	1. gün toplanan mama miktarının 5 eksiğinin sıfıra olan uzaklığı kadar
3. gün	2. gün toplanan mama miktarının 3 kg fazlası kadar

Başlangıçta toplanan mama miktarının 8 kg'dan az olduğu bilinmektedir. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Başlangıçtaki mama miktarına bağlı 1, 2 ve 3. günler için toplanan mama miktarını veren fonksiyonların cebirsel temsillerini bulunuz.

b) 3. gün için oluşturulan fonksiyonun grafiğini çiziniz.

c) Başlangıçta toplanan mama miktarının artmasıyla 3. gün toplanan mama miktarı azalmaktadır. Bu durumun başlangıçta toplanan mama miktarının hangi değerleri için sağlandığını fonksiyonlardan yararlanarak bulunuz.

ç) Başlangıçta toplanan mama miktarının alacağı herhangi iki değer için 3. gün toplanan mama miktarının değerlerinin birbirinden farklı olduğu biliniyor. Bu şartı sağlayacak başlangıçta toplanan mama miktarı değerlerine ait aralıkların ne olabileceğini bulunuz.

Çözüm

a) 1. gün toplanan mama miktarını veren fonksiyon f olmak üzere $f: (0, 8) \longrightarrow (0, 16)$, $f(x) = 2x$,
2. gün toplanan mama miktarını veren fonksiyon g olmak üzere $g: (0, 8) \longrightarrow [0, 11]$, $g(x) = |2x - 5|$,
3. gün toplanan mama miktarını veren fonksiyon h olmak üzere $h: (0, 8) \longrightarrow [0, 14]$, $h(x) = |2x - 5| + 3$ olarak bulunur.

b) Önce $y = 2x - 5$ fonksiyonunun grafiği çizilir. Grafiğin negatif değer aldığı kısmın, x eksenine göre yansıması alınır (Grafik 1). Ardından y ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim ötelenerek $h(x) = |2x - 5| + 3$ fonksiyonunun grafiği, tanım ve görüntü kümesine uygun olarak elde edilir (Grafik 2).

y, x, O, $y = 2x - 5$, 5, −5, $\frac{5}{2}$

Grafik 1

y, x, O, $h(x) = |2x - 5| + 3$, 14, 8, 3, $\frac{5}{2}$, 8

Grafik 2

c) h fonksiyonunun grafiği incelendiğinde ellerindeki mama miktarı $\left(0, \frac{5}{2}\right)$nda olduğunda h fonksiyonunun azalan olduğu görülmektedir. Buradan ellerinde bulunan mama miktarının alacağı değerler kümesi $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ olarak bulunur.

ç) Ellerinde bulunan mama miktarının alacağı herhangi iki değer için 3. gün toplanan mama miktarının aldığı değerlerin birbirinden farklı olması beklenmektedir. Bu durum, h fonksiyonunun bire bir olması ile mümkündür.

h fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x in $\left(\frac{5}{2}, 8\right)$ndaki herhangi iki değeri için $h(x)$in aldığı değerlerin birbirinden farklı olduğu görülür.

Benzer şekilde x in $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ndaki herhangi iki değeri için $h(x)$in aldığı değerler birbirinden farklıdır.

$\left(0, \frac{5}{2}\right)$ ve $\left(\frac{5}{2}, 8\right)$ için h fonksiyonu bire birdir ve istenen durum sağlanır.

5. Sıra Sizde

Bir kurye, A noktasındaki dağıtım merkezinden sabit hızla yola çıkarak 5 km uzaklıkta bulunan B noktasındaki eve bir paket bırakıyor. Mola vermeden aynı sabit hızla A noktasına geri dönüyor. Kuryenin giderken ve dönerken aynı doğrusal yolu kullandığı ve gidiş süresinin 20 dakika olduğu biliniyor. Kuryenin zamana (dk.) bağlı olarak B noktasına mesafesini (km) ifade eden fonksiyon f olsun.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) f fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

b) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Kontrol Noktası



1. $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |ax + b|$ fonksiyonu için aşağıdaki sonuçlara varılır.

- En geniş tanım kümesi, gerçek sayılardır.
- Görüntü kümesi, $[0, \infty)$ dır.
- f fonksiyonunun sıfırı, $f(x) = |ax + b| = 0$ ise $x = -\frac{b}{a}$ dır.

  $a > 0$ olmak üzere f fonksiyonunun parçalı gösterimi

$$f(x) = \begin{cases} -ax - b, & x < -\frac{b}{a} \\ ax + b, & x \geq -\frac{b}{a} \end{cases}$$ şeklindedir.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		∞
$f(x) = \lvert ax + b \rvert$		+	0	+	

- $x < -\frac{b}{a}$ ve $x > -\frac{b}{a}$ için **f nin işareti pozitif**tir.
- f fonksiyonunun **minimum noktası** $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, **maksimum noktası yoktur**.
- f fonksiyonu **bire bir değildir**.
- f fonksiyonu; $x < -\frac{b}{a}$ için **azalan**, $x > -\frac{b}{a}$ için **artan**dır.

2. $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -|ax + b|$ fonksiyonu için aşağıdaki sonuçlara varılır.

- En geniş tanım kümesi, gerçek sayılardır.
- Görüntü kümesi, $(-\infty, 0]$ dır.
- g fonksiyonunun sıfırı, $g(x) = -|ax + b| = 0$ ise $x = -\frac{b}{a}$ dır.
- $a > 0$ olmak üzere g fonksiyonunun parçalı gösterimi

$$g(x) = \begin{cases} ax + b, & x < -\frac{b}{a} \\ -ax - b, & x \geq -\frac{b}{a} \end{cases}$$ şeklindedir.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		∞
$g(x) = -\lvert ax + b\rvert$		$-$	0	$-$	

- $x < -\frac{b}{a}$ ve $x > -\frac{b}{a}$ için g nin işareti **negatif**tir.
- g fonksiyonunun **minimum noktası yoktur, maksimum noktası** $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ dır.
- g fonksiyonu **bire bir değil**dir.
- g fonksiyonu; $x < -\frac{b}{a}$ için **artan**, $x > -\frac{b}{a}$ için **azalan**dır.

3. $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = |ax + b| + c$ fonksiyonu için aşağıdaki sonuçlara varılır.

- En geniş tanım kümesi, gerçek sayılardır.
- Görüntü kümesi, $[c, \infty)$ dır.
- $a > 0$ olmak üzere h fonksiyonunun parçalı gösterimi

$$h(x) = \begin{cases} -ax - b + c, & x < -\frac{b}{a} \\ ax + b + c, & x \geq -\frac{b}{a} \end{cases}$$ şeklindedir.

- h fonksiyonunun sıfırı; $c > 0$ ise yoktur, $c < 0$ ise iki tanedir. Bu değerler, parçalı gösterimli fonksiyonları oluşturan cebirsel ifadelerin sıfıra eşitlenmesiyle bulunur.

  $c < 0$ olmak üzere h fonksiyonunun sıfırları,

- $-ax - b + c = 0$ ise $x_1 = \frac{c - b}{a}$ ve $ax + b + c = 0$ ise $x_2 = \frac{-c - b}{a}$ olur.

x	$-\infty$		$\frac{c-b}{a}$		$\frac{-c-b}{a}$		∞
h(x)		$+$	0	$-$	0	$+$	

- h fonksiyonunun işareti, c katsayısının pozitif veya negatif olmasına göre iki farklı durumda incelenebilir.

  $c > 0$ ise h fonksiyonunun işareti **pozitif**tir.

  $c < 0$ ise $x < \frac{c-b}{a}$ ve $x > \frac{-c-b}{a}$ için h nin işareti **pozitif**,
  $\frac{c-b}{a} < x < \frac{-c-b}{a}$ için h nin işareti **negatif**tir.
- h fonksiyonunun **minimum noktası** $\left(-\frac{b}{a}, c\right)$ dır, **maksimum noktası yoktur**.
- h fonksiyonu **bire bir değil**dir.
- h fonksiyonu; $x < -\frac{b}{a}$ için **azalan**, $x > -\frac{b}{a}$ için **artan**dır.

4. $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t(x) = -|ax + b| + c$ fonksiyonu için aşağıdaki sonuçlara varılır.

- En geniş tanım kümesi, gerçek sayılardır.
- Görüntü kümesi, $(-\infty, c]$ dır.
- $a > 0$ olmak üzere t fonksiyonunun parçalı gösterimi

$$t(x) = \begin{cases} ax + b + c, & x < -\frac{b}{a} \\ -ax - b + c, & x \geq -\frac{b}{a} \end{cases}$$ şeklindedir.

  t fonksiyonunun sıfırı; $c < 0$ ise yoktur, $c > 0$ ise iki tanedir. Bu değerler, parçalı gösterimli fonksiyonları oluşturan cebirsel ifadelerin sıfıra eşitlenmesiyle bulunur.

  $c > 0$ olmak üzere t fonksiyonunun sıfırları,

  $ax + b + c = 0$ ise $x_1 = \frac{-c-b}{a}$ ve $-ax - b + c = 0$ ise $x_2 = \frac{c-b}{a}$ olur.

x	$-\infty$		$\frac{-c-b}{a}$		$\frac{c-b}{a}$		∞
t(x)		−	0	+	0	−	

- t fonksiyonunun işareti, c katsayısının pozitif veya negatif olmasına göre iki farklı durumda incelenebilir.

  $c < 0$ ise t fonksiyonunun işareti **pozitif**tir.

  $c > 0$ ise $x < \frac{-c-b}{a}$ ve $x > \frac{c-b}{a}$ için t nin işareti **negatif**,

  $\frac{-c-b}{a} < x < \frac{c-b}{a}$ için t nin işareti **pozitif**tir.
- t fonksiyonunun **minimum noktası** yoktur, **maksimum noktası** $\left(-\frac{b}{a}, c\right)$ dır.
- t fonksiyonu **bire bir değil**dir.
- t fonksiyonu; $x < -\frac{b}{a}$ için **artan**, $x > -\frac{b}{a}$ için **azalan**dır.



Alıştırmalar

1. Elektrik devrelerinde kullanılan elemanlardan biri olan dirençler, farklı değerlerde üretilebilmektedir. Tam olarak istenen değerlerde direnç üretmek zor olduğundan dirençlerin değerlerinde belirli bir hata payı bulunur. Bu hata payı tolerans olarak isimlendirilir ve yüzde olarak ifade edilir. Örneğin 500 ohm ±%2 değerinde üretilen dirençlerin hata payı %2 olduğundan hata miktarı $500 \cdot \frac{2}{100} = 10$ ohm olur. Üretilen dirençlerin gerçek değerinin $[500 - 10, 500 + 10]$nda olabileceği ifade edilebilir.

Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Elektrik devresi elemanları satışı yapan bir firma, 680 ohm ±%5 değerinde dirençler üretmektedir. Üretilen dirençlerin gerçek değerine (ohm) bağlı hata miktarının (ohm) değişimini ifade eden f fonksiyonunun cebirsel temsilini bularak fonksiyonun grafiğini çiziniz.

b) Aşağıdaki tabloyu elde ettiğiniz f fonksiyonunun nitel özelliklerine göre uygun ifadelerle doldurunuz.

Fonksiyonun Nitel Özellikleri	f
Tanım Kümesi	
Görüntü Kümesi	
Fonksiyonun Sıfırı	
Fonksiyonun İşareti	
Maksimum Nokta	
Minimum Nokta	
Bire Birliği	
Artan veya Azalan Olduğu Aralıklar	

2. Gerçek sayılarda $f(x) = 1 - 2x$ ve $g(x) = |f(x)| - 3$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar veriliyor.

g fonksiyonuna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Görüntü kümesini bulunuz.

b) Sıfırlarını bulunuz.

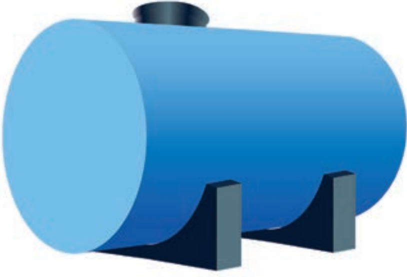
c) Artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.

ç) Minimum ve maksimum noktalarını bulunuz.

2.3. DOĞRUSAL FONKSİYONLARLA İFADE EDİLEBİLEN DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER İÇEREN PROBLEMLER

Konuya Başlarken





Yanda verilen silindir şeklindeki deponun içinde 120 litre su bulunmaktadır. Deponun tabanında bir çatlak oluşmuştur. Oluşan çatlaktan birim zamanda sızan su miktarı sabittir. Zamana (dk.) bağlı olarak depoda kalan su miktarını (litre) gösteren fonksiyon f olmak üzere uygun aralıkta tanımlı f fonksiyonunun cebirsel temsili $f(t) = 120 - 0{,}8t$ şeklindedir.

Buna göre aşağıdaki sorularla ilgili fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

1. Belirli bir sürenin sonunda depoda kalan su miktarının kaç litre olduğu nasıl bulunabilir?

2. Depodaki suyun tamamının kaç dakika sonra tükeneceği nasıl bulunabilir?

3. Depoda kalan su miktarının kaçıncı dakikalar arasında 40 litre ile 80 litre arasında olduğunu hesaplamak için nasıl bir yol izlenebilir?

Doğrusal ilişki içeren problemlerin çözümünde doğrusal fonksiyonlar yardımıyla elde edilen denklem ve eşitsizlikler kullanılır.

12. Uygulama



Teknoloji Uygulaması

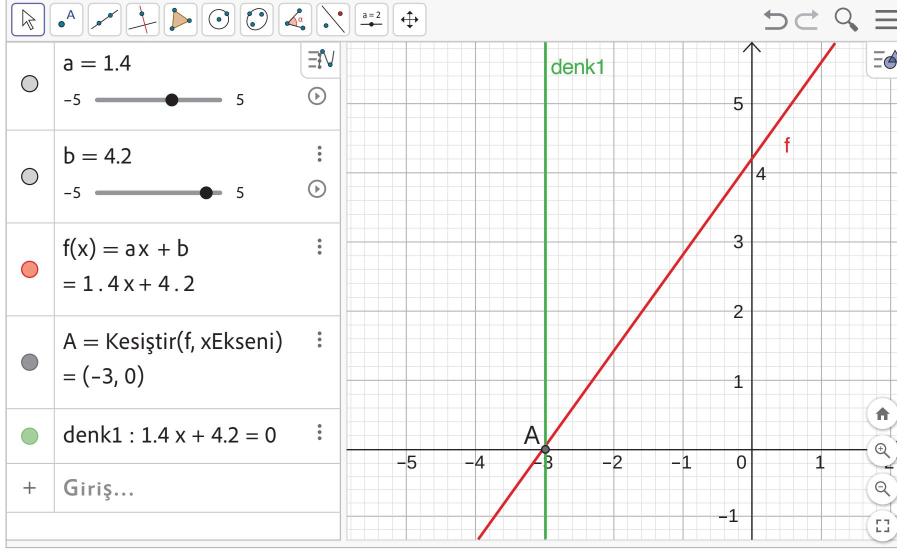
$\forall a,b \in \mathbb{R}$ olmak üzere matematik yazılımını açarak aşağıdaki adımları sırasıyla uygulayınız.

1. **Giriş** bölümüne **f(x) = ax + b** yazıp **Enter** tuşuna basınız. Ekranda f fonksiyonunun grafiği ile a ve b sürgüleri oluşacaktır.

2. **Kesiştir** aracını seçip sırasıyla f doğrusunu ve x eksenini işaretleyiniz. Ekranda f doğrusunun x eksenini kestiği nokta oluşacaktır.

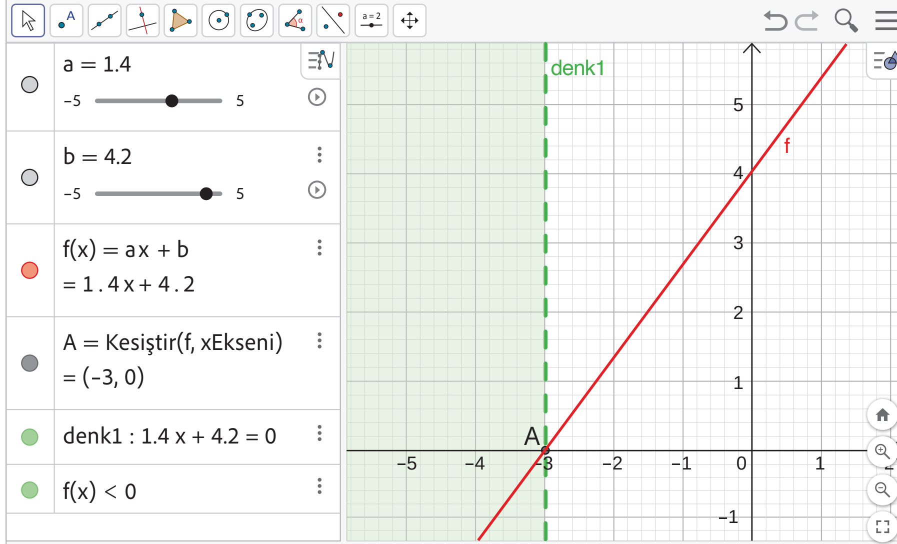


3. **Giriş** bölümüne **ax + b = 0** yazıp **Enter** tuşuna basınız. Ekranda denk1 doğrusu oluşacaktır (Görsel 1).



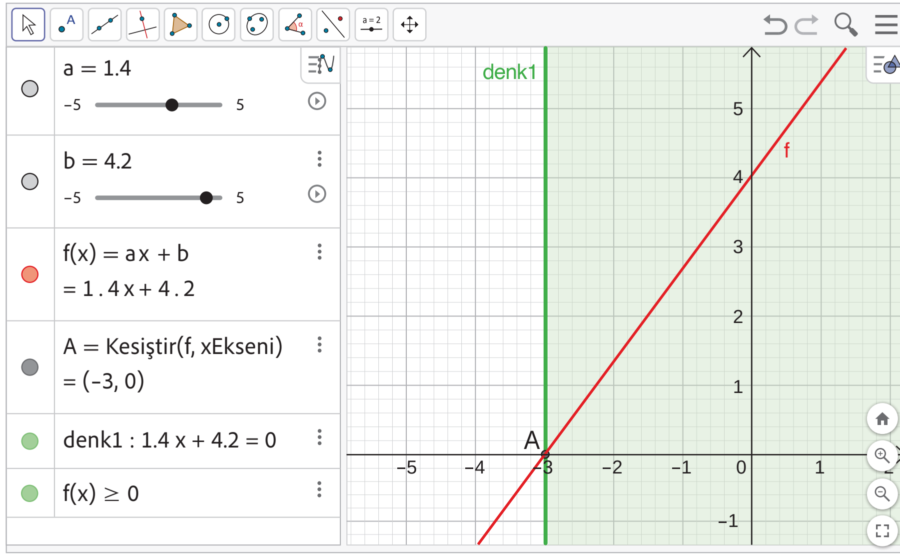
Görsel 1

4. **Giriş** bölümüne **f(x) < 0** yazıp **Enter** tuşuna basınız. Ekranda f(x) < 0 eşitsizliğinin çözüm aralığı oluşacaktır (Görsel 2).



Görsel 2

5. **Giriş** bölümüne **f(x) ≥ 0** yazıp **Enter** tuşuna basınız. Ekranda f(x) ≥ 0 eşitsizliğinin çözüm aralığı oluşacaktır (Görsel 3).



Görsel 3

6. a ve b sürgülerini hareket ettirerek değişimleri gözlemleyiniz.

Gözlemlerinizden yararlanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) ax + b = 0 denkleminin kökü ile f fonksiyonunun sıfırı arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayınız.

b) Görsel 2’de f(x) < 0 eşitsizliğini sağlayan değerler ile ax + b = 0 denkleminin kökü arasında nasıl bir ilişki olduğunu aşağıda verilen işaret tablosunu doldurarak açıklayınız.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		∞
f(x)			0		

c) Görsel 3’te f(x) ≥ 0 eşitsizliğini sağlayan değerler ile ax + b = 0 denkleminin kökü arasında nasıl bir ilişki olduğunu aşağıda verilen işaret tablosunu doldurarak açıklayınız.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		∞
f(x)			0		

ç) f(x) = 0 denkleminin çözüm kümesini ve f(x) < 0, f(x) ≥ 0 eşitsizliklerinin çözüm aralıklarını bulmak için f fonksiyonunun grafik veya cebirsel temsilini kullanarak çözüm stratejileri oluşturunuz.

f ve g doğrusal fonksiyonlar olmak üzere $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ benzeri ifadeler yardımıyla problemin çözümüne ulaşılabilir.

Özel olarak $g(x) = 0$ olduğunda $f(x) < g(x)$ eşitsizliği $f(x) < 0$, $f(x) = g(x)$ denklemi $f(x) = 0$ biçimine dönüşür.

a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, $a \neq c$, a ve c gerçek sayılarından en az biri sıfırdan farklıdır. Gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsilleri $f(x) = ax + b$ ve $g(x) = cx + d$ olsun.

Buradan elde edilen $f(x) = g(x)$ ifadesine **birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem**; $f(x) < g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ ifadelerine **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik** denir.

m, $n \in \mathbb{R}$ ve $m \neq 0$ olmak üzere $f(x) = g(x)$ denkleminden $ax + b = cx + d \Rightarrow (a - c)x + b - d = 0$ elde edilir. $a - c = m$ ve $b - d = n$ olmak üzere $mx + n = 0$ elde edilir.

$mx + n = 0$ denkleminde **x bilinmeyen**, **m** ve **n katsayı**, **n sabit terim** olarak isimlendirilir.

Birinci dereceden bir bilinmeyenli $mx + n = 0$ denklemini sağlayan x değerine **denklemin kökü** denir.

Birinci dereceden bir bilinmeyenli bir eşitsizliği sağlayan değerlerin aralığına **eşitsizliğin çözüm aralığı** denir.

7. ÖRNEK

Dikildiğinde boyu 22 cm olan bir bitkinin boyu, ayda 6 cm uzamaktadır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Bitkinin zamana (ay) bağlı boyunu (cm) ifade eden fonksiyonun cebirsel temsilini oluşturunuz.

b) Bitkinin boyunun kaçıncı ayda 40 cm olduğunu elde etmeye yarayan denklemi oluşturarak denklemin derecesini, katsayılarını, sabit terimini ve kökünü bulunuz.

c) Bitkinin boyunun 52 cm'nin altında olduğu zaman aralığını bulunuz.

Çözüm

a) Bitkinin zamana (ay) bağlı boyunu (cm) gösteren fonksiyon f olsun. Uygun aralıkta tanımlı f fonksiyonu doğrusal bir fonksiyon olup cebirsel temsili, $f(x) = 22 + 6x$ olur.

b) $22 + 6x = 40 \Rightarrow 6x - 18 = 0$ denklemi birinci dereceden olup bilinmeyeni x tir.
Denklemin katsayıları 6 ve -18, sabit terimi -18'dir.
Denklemin kökü $6x - 18 = 0 \Rightarrow 6x = 18 \Rightarrow x = 3$ bulunur.

c) $f(x) < 52$ eşitsizliğini sağlayan değerler için bitkinin boyu 52 cm'nin altındadır.
Buradan $22 + 6x < 52 \Rightarrow 6x < 52 - 22 \Rightarrow 6x < 30 \Rightarrow x < 5$ bulunur.
Bitkinin boyu $[0, 5)$ nda 52 cm'nin altındadır. Eşitsizliğin çözüm aralığı $[0, 5)$ dır.

8. ÖRNEK

f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3\left(\frac{x}{2} - 1\right)$ olmak üzere $f(x) < 0$ eşitsizliğinin çözüm aralığını

a) f fonksiyonunun cebirsel temsilinden yararlanarak bulunuz.

b) f fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak bulunuz.

Çözüm

a) $f(x) < 0$ olmak üzere $3\left(\frac{x}{2} - 1\right) < 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} - 3 < 0$

$$\Rightarrow \frac{3x}{2} < 3$$

$$\Rightarrow 3x < 6$$

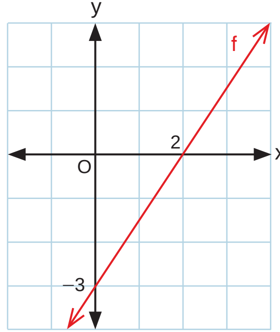
$$\Rightarrow \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} < \frac{6}{3}$$

$$\Rightarrow x < 2 \text{ olur.}$$

Buradan $f(x) < 0$ eşitsizliğinin çözüm aralığı $(-\infty, 2)$ olur.

b) f fonksiyonunun cebirsel temsili, $f(x) = 3\left(\frac{x}{2} - 1\right) \Rightarrow f(x) = \frac{3x}{2} - 3$ şeklinde düzenlenebilir.

Buradan g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun tanım aralığındaki değerleri $\frac{3}{2}$ katı ile eşleyen fonksiyonun grafiği y ekseni boyunca negatif yönde 3 birim ötelenerek f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi oluşturulur.



$$f(x) = \frac{3x}{2} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} = 3 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \text{ bulunur.}$$

Bu değer, f fonksiyonunun sıfırıdır. Grafik incelendiğinde f fonksiyonunun grafiğinin x eksenini $(2, 0)$ noktasında kestiği ve fonksiyonun $(-\infty, 2)$ nda negatif değerler aldığı görülür.

$f(x) < 0$ eşitsizliğinin çözüm aralığı $(-\infty, 2)$ olur. $(-\infty, 2)$ sayı doğrusunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir.



Kontrol Noktası 

$m, n \in R$ ve $m \neq 0$ olmak üzere

$mx + n = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\left\{-\frac{n}{m}\right\}$ dir. f ve g gerçek sayılarda tanımlı doğrusal fonksiyonlar olsun.

$f(x) < g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ eşitsizliklerinin çözüm aralıkları Tablo 2.2'deki gibidir.

***Tablo 2.2:** Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler ve Çözüm Aralıkları*

Eşitsizlik	Eşitsizliğin Düzenlenmiş Hâli	m > 0 İçin Çözüm Aralığı	m < 0 İçin Çözüm Aralığı
$f(x) < g(x)$	$mx + n < 0$	$\left(-\infty, -\frac{n}{m}\right)$	$\left(-\frac{n}{m}, \infty\right)$
$f(x) \leq g(x)$	$mx + n \leq 0$	$\left(-\infty, -\frac{n}{m}\right]$	$\left[-\frac{n}{m}, \infty\right)$
$f(x) > g(x)$	$mx + n > 0$	$\left(-\frac{n}{m}, \infty\right)$	$\left(-\infty, -\frac{n}{m}\right)$
$f(x) \geq g(x)$	$mx + n \geq 0$	$\left[-\frac{n}{m}, \infty\right)$	$\left(-\infty, -\frac{n}{m}\right]$

13. Uygulama



Denklem ve Eşitsizliklerin Çözümünde Kullanılan Stratejiler

Aşağıda verilen problemleri inceleyerek soruları cevaplayınız.

Yağmur suları, iki farklı parkta bulunan A ve B depolarında toplanarak güneşli havalarda çimlerin sulanması amacıyla kullanılmaktadır. A ve B depoları tamamen dolu iken sulama sistemi çalıştırılmış ve depolardaki su tükenene kadar sulamaya devam edilmiştir. Sulama sırasında birim zamanda kullanılan su miktarları sabittir. A ve B depolarında kalan su miktarları (l), zamana (sa.) bağlı olarak sırasıyla uygun aralıklarda tanımlı f ve g fonksiyonları ile ifade edilmiştir.

f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsilleri, $f(x) = 38{,}4 - 1{,}2x$ ve $g(x) = 30{,}4 - 0{,}8x$ biçimindedir.

1. Problem: A ve B depolarında başlangıçta kaç litre su olduğunu ve depolardaki suyun tükendiği zamanı (sa.) bulunuz.

2. Problem: Depolarda kalan su miktarları birbirine eşit olduğunda kalan su miktarını ve eşitlenme zamanını bulunuz.

1. Matematik yazılımı yardımıyla f ve g fonksiyonlarının gerçek sayılarda grafik temsillerini aşağıdaki adımları izleyerek oluşturunuz.

a) **Giriş** bölümüne **f(x) = 38,4 − 1,2x** yazıp **Enter** tuşuna basınız.

b) **Giriş** bölümüne **g(x) = 30,4 − 0,8x** yazıp **Enter** tuşuna basınız.

2. f ve g fonksiyonlarının grafikleri, 1. problemin çözümü için nasıl kullanılabilir? Fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

3. 1. problemi fonksiyonların cebirsel temsillerinden yararlanarak nasıl çözebilirsiniz? Çözüm stratejinizi açıklayarak problemi çözünüz.

4. Matematik yazılımı yardımıyla f ve g fonksiyonlarına ait grafiklerin eksenleri kestiği noktaları aşağıdaki adımları izleyerek bulunuz.

a) **Kesiştir** aracını seçip sırasıyla f doğrusunu ve x eksenini işaretleyiniz.

b) **Kesiştir** aracını seçip sırasıyla g doğrusunu ve x eksenini işaretleyiniz.

c) **Kesiştir** aracını seçip sırasıyla f doğrusunu ve y eksenini işaretleyiniz.

ç) **Kesiştir** aracını seçip sırasıyla g doğrusunu ve y eksenini işaretleyiniz.

5. f ve g fonksiyonlarına ait grafiklerin eksenleri kestiği noktalardan yararlanarak 1. problemi nasıl çözebilirsiniz? Çözüm stratejinizi açıklayarak problemi çözünüz.

6. 1. problemin çözümünde kullandığınız yöntemleri karşılaştırarak çözümlerinizi doğrulayınız.

7. 1. problemin çözümünde kullandığınız yöntemleri doğrusal fonksiyon içeren farklı problem durumları için nasıl kullanabilirsiniz? Genellemenizi oluşturunuz.

8. Oluşturduğunuz genellemeyi sözel, cebirsel ve grafiksel olarak doğrulayınız.

9. 2. problemi fonksiyonların cebirsel temsillerinden yararlanarak nasıl çözebilirsiniz? Çözüm stratejinizi açıklayarak problemi çözünüz.

10. Matematik yazılımı yardımıyla f ve g fonksiyonlarına ait grafiklerin kesim noktasını aşağıdaki adımları izleyerek bulunuz.

a) **Kesiştir** aracını seçiniz.

b) Sırasıyla f ve g doğrularını işaretleyiniz.

11. f ve g fonksiyonlarına ait grafiklerin kesim noktasından yararlanarak 2. problemi nasıl çözebilirsiniz? Çözüm stratejinizi açıklayarak problemi çözünüz.

12. 2. problemin çözümünde kullandığınız yöntemleri karşılaştırarak çözümlerinizi doğrulayınız.

13. 2. problemin çözümünde kullandığınız yöntemleri doğrusal fonksiyon içeren farklı problem durumları için nasıl kullanabilirsiniz? Genellemenizi oluşturunuz.

14. Oluşturduğunuz genellemeyi sözel, cebirsel ve grafiksel olarak değerlendiriniz.

14. Uygulama



Denklem ve Eşitsizlik İçeren Problemlerin Çözümü

Aşağıda verilen problemleri inceleyerek soruları cevaplayınız.

Arkeologlar, kişilerin boyunu tahmin etmek için kazı sırasında buldukları uyluk kemiklerinin (dizden kalça yuvasına kadar olan kemik) uzunluğundan yararlanmaktadır. Buna göre bir erkeğin boyu, uyluk kemiğinin uzunluğunun 2,2 katına 69 eklenerek ve bir kadının boyu, uyluk kemiğinin uzunluğunun 2,3 katına 61,4 eklenerek cm cinsinden yaklaşık olarak elde edilebilmektedir.

1. Problem: Erkek ve kadınların uyluk kemiği uzunluğuna (x) bağlı boyu (y) veren denklemler nasıl bulunabilir?

2. Problem: Bir arkeolojik kazı sırasında bulunan bazı uyluk kemiklerinin ve kişilerin boylarının yaklaşık değerleri tabloda verilmiştir. Tabloda verilmeyen değerleri bulunuz.

	Erkek			**Kadın**		
Uyluk Kemiğinin Uzunluğu (cm)	45		50		25	30
Kişinin Boyunun Yaklaşık Değeri (cm)		175		150		

1. 1. problemde istenen denklemlerin nasıl elde edilebileceğiyle ilgili stratejinizi belirleyerek denklemleri yazınız.

2. 2. problemde tabloda verilmeyen değerleri nasıl bulabilirsiniz? Çözüm stratejinizi belirleyerek tabloyu doldurunuz.

3. Matematik yazılımı yardımıyla 1. soruda elde ettiğiniz denklemlere ait grafikleri aşağıdaki adımları izleyerek çiziniz.

1. adım: **Giriş** bölümüne erkeklerin boyunu uyluk kemiği uzunluğuna bağlı olarak veren denklemi yazıp **Enter** tuşuna basınız. Yazılan denkleme ait grafik, cebir ve grafik ekranında oluşacaktır.

2. adım: **Giriş** bölümüne kadınların boyunu uyluk kemiği uzunluğuna bağlı olarak veren denklemi yazıp **Enter** tuşuna basınız. Yazılan denkleme ait grafik, cebir ve grafik ekranında oluşacaktır.

Grafiklerden yararlanarak 2. problemde tablodaki verilmeyen değerleri nasıl bulabilirsiniz? Çözüm stratejinizi açıklayarak tabloda verilmeyen değerleri bulunuz.

4. 2. problemin çözümünde kullandığınız yöntemleri karşılaştırarak çözümlerinizi doğrulayınız. Hangi yöntemin daha kullanışlı olduğunu açıklayınız.

5. 1 ve 2. problemlerin çözümünde kullandığınız yöntemleri doğrusal ilişki içeren başka problemlerin çözümünde nasıl kullanabilirsiniz? Genellemelerinizi oluşturunuz.

6. Oluşturduğunuz genellemeleri sözel, cebirsel veya grafiksel olarak değerlendiriniz.

9. ÖRNEK

Güneş ve elektrik enerjisi olmak üzere iki tip ısıtma sisteminin kurulum ve işletme maliyetlerine ilişkin bilgiler Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1

Isıtma Sisteminin Türü	Yıllık İşletme Maliyeti (TL)	Kurulum Maliyeti (TL)
Güneş Enerjisi	1600	57 000
Elektrik Enerjisi	5200	21 000

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Tablo 1'deki verileri kullanarak güneş ve elektrik enerjisi ısıtma sistemlerinin kullanım süresine (yıl) bağlı toplam maliyetini (TL) veren fonksiyonları yazınız.

b) Elde ettiğiniz fonksiyonlar yardımıyla Tablo 2'de verilen kullanım sürelerine göre güneş ve elektrik enerjisi sistemlerinin toplam maliyetlerini bularak tabloyu uygun şekilde doldurunuz.

Tablo 2

Kullanım Süresi (Yıl)	0	5	10	15
Güneş Enerjisinin Toplam Maliyeti (TL)				
Elektrik Enerjisinin Toplam Maliyeti (TL)				

c) Matematik yazılımı yardımıyla a şıkkında elde ettiğiniz fonksiyonlara ait grafikleri aşağıdaki adımları izleyerek çiziniz.

1. adım: Giriş bölümüne güneş enerjisi ısıtma sisteminin maliyet fonksiyonunu yazıp **Enter** tuşuna basınız. Cebir ve grafik ekranında fonksiyonun grafiği oluşacaktır.

2. adım: Giriş bölümüne elektrik enerjisi ısıtma sisteminin maliyet fonksiyonunu yazıp **Enter** tuşuna basınız. Cebir ve grafik ekranında fonksiyonun grafiği oluşacaktır.

3. adım: Kesiştir aracını seçip sırasıyla 1 ve 2. adımlarda oluşturduğunuz fonksiyonları işaretleyiniz.

Güneş ve elektrik enerjisi ısıtma sistemlerinin toplam maliyetlerinin kaç yıllık kullanım süresi sonunda ve kaç Türk lirasında eşitleneceğini maliyet fonksiyonlarının grafiklerinin kesim noktasından yararlanarak nasıl bulabilirsiniz? Stratejilerinizi açıklayınız.

ç) Güneş ve elektrik enerjisi ısıtma sistemlerinin toplam maliyetlerinin kaç yıllık kullanım süresi sonunda ve kaç Türk lirasında eşitleneceğini cebirsel çözüm yaparak nasıl bulabilirsiniz? Stratejinizi açıklayarak istenen değeri bulunuz.

d) c ve ç şıklarında problemin çözümünde kullandığınız yöntemleri karşılaştırarak çözümlerinizi doğrulayınız. Hangi yöntemin daha kullanışlı olduğunu açıklayınız.

e) b şıkkında elde ettiğiniz değerleri fonksiyonların grafiğinden yararlanarak doğrulayınız.

f) c ve ç şıklarında problemin çözümünde kullandığınız yöntemleri doğrusal ilişki içeren başka problemlerin çözümünde nasıl kullanabilirsiniz? Genellemelerinizi oluşturunuz.

g) Güneş ve elektrik enerjisi sistemlerine ait 5, 10 ve 15. yılların sonundaki toplam maliyetleri karşılaştırarak hangi enerji sisteminin daha ekonomik olduğunu belirleyiniz.



Çözüm

a) Güneş enerjisi ısıtma sisteminin toplam maliyetini hesaplamak amacıyla 57 000 Türk lirası kurulum maliyetine her yıl için 1600 Türk lirası eklenmelidir. Buradan x yıl için güneş enerjisi ısıtma sisteminin toplam maliyetini (TL) veren fonksiyon, $g(x) = 57\,000 + 1600x$ olur.

Elektrik enerjisi ısıtma sisteminin toplam maliyetini hesaplamak amacıyla 21 000 Türk lirası kurulum maliyetine her yıl için 5200 Türk lirası eklenmelidir. Buradan x yıl için elektrik enerjisi ısıtma sisteminin toplam maliyetini (TL) veren fonksiyon, $e(x) = 21\,000 + 5200x$ olur.

b) Güneş enerjisi ısıtma sisteminin toplam maliyeti;

$x = 0$ için $g(0) = 0 \cdot 1600 + 57\,000 = 57\,000$ TL,

$x = 5$ için $g(5) = 5 \cdot 1600 + 57\,000 = 65\,000$ TL,

$x = 10$ için $g(10) = 10 \cdot 1600 + 57\,000 = 73\,000$ TL,

$x = 15$ için $g(15) = 15 \cdot 1600 + 57\,000 = 81\,000$ TL olur.

Elektrik enerjisi ısıtma sisteminin toplam maliyeti;

$x = 0$ için $e(0) = 5200 \cdot 0 + 21\,000 = 21\,000$ TL,

$x = 5$ için $e(5) = 5200 \cdot 5 + 21\,000 = 47\,000$ TL,

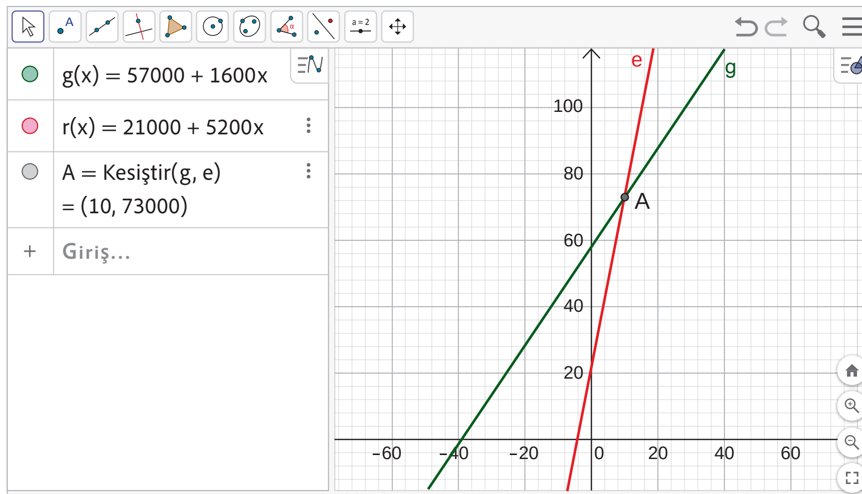
$x = 10$ için $e(10) = 5200 \cdot 10 + 21\,000 = 73\,000$ TL,

$x = 15$ için $e(15) = 5200 \cdot 15 + 21\,000 = 99\,000$ TL olur. Buradan Tablo 2 aşağıdaki gibi oluşturulur.

Tablo 2

Kullanım Süresi (Yıl)	0	5	10	15
Güneş Enerjisinin Toplam Maliyeti (TL)	57 000	65 000	73 000	81 000
Elektrik Enerjisinin Toplam Maliyeti (TL)	21 000	47 000	73 000	99 000

c)



g ve e fonksiyonlarının grafikleri (10, 73 000) noktasında kesişmektedir. Buna göre iki ısıtma sisteminin toplam maliyeti, 10. yılın sonunda eşitlenerek 73 000 Türk lirası olmaktadır.

ç) Güneş ve elektrik enerjisi ısıtma sistemlerinin toplam maliyetlerinin kaçıncı yılda eşitlendiğini bulmak için $g(x) = 57\,000 + 1600x$ ve $e(x) = 21\,000 + 5200x$ ifadeleri birbirine eşitlenerek elde edilen denklem çözülmelidir.

$$g(x) = e(x) \Rightarrow 57\,000 + 1600x = 21\,000 + 5200x \Rightarrow 57\,000 - 21\,000 = 5200x - 1600x$$

$$36\,000 = 3600x$$

$$x = \frac{36\,000}{3600} = 10 \text{ yıl bulunur.}$$

$x = 10$ için $\quad g(10) = e(10)$

$$57\,000 + 1600 \cdot 10 = 21\,000 + 5200 \cdot 10$$

$$73\,000 = 73\,000 \text{ Türk lirası olur.}$$

d) c ve ç şıklarında bulunan $x = 10$ değeri ve bu değere karşılık gelen $g(10) = e(10) = 73\,000$ değeri, hem grafikte hem de cebirsel çözümde aynı çıkmıştır. İstenen değerler, matematik yazılımı kullanıldığında cebirsel çözüm yapılmadan doğrudan bulunabilmektedir. Böylece zamandan tasarruf edilmiş ve işlem hatası yapmak gibi istenmeyen durumların önüne geçilmiş olur. Matematik yazılımını kullanma imkânının olmadığı durumlarda cebirsel çözüm yapılarak da istenen değerler elde edilebilir.

e) Matematik yazılımında **Giriş** bölümüne sırasıyla g(0), e(0), g(5), e(5), g(10), e(10), g(15) ve e(15) yazılıp **Enter** tuşuna basılır. **Giriş** bölümünde 0, 5, 10 ve 15 değerlerine karşılık gelen değerler yazacaktır. Bu değerler b şıkkında bulunan değerlerle aynıdır.

a = g(0)
= 21000
b = e(0)
= 57000
c = g(5)
= 47000
d = e(5)
= 65000
+ Giriş...

a = g(0)
= 21000
b = e(0)
= 57000
c = g(5)
= 47000
d = e(5)
= 65000
+ Giriş...

f) Doğrusal ilişki içeren problemlerde doğrusal ilişki, bir doğrusal fonksiyonun cebirsel temsili olarak ifade edilir. Elde edilen fonksiyonların cebirsel temsilinden yararlanılarak grafiği çizilir ve grafik yardımıyla problem çözülebilir.

Grafik çizilmeden cebirsel işlemler yapılarak problem çözülebilir. İki doğrusal fonksiyon birbirine eşitlenerek çözümünden elde edilen x ve y değerleri, bu fonksiyonların grafiklerinin kesim noktasının koordinatlarıdır.

g) 0-10 yıllık zaman dilimindeki kullanımda elektrik enerjisi ısıtma sistemi, güneş enerjisi ısıtma sistemine göre daha ekonomiktir. Isıtma sistemlerinin toplam maliyetleri 10. yılda eşitlenmektedir. İlk 10 yıllık kullanım süresi sonunda elektrik enerjisi ısıtma sistemi daha ekonomiktir, 10 yıldan sonraki kullanımlarda güneş enerjisi ısıtma sistemi daha ekonomiktir. 15 yıllık kullanım sonunda güneş enerjisi ısıtma sisteminin toplam maliyeti 81 000 Türk lirası, elektrik enerjisi ısıtma sisteminin toplam maliyeti 99 000 Türk lirasıdır. Buna göre 15 yıllık kullanım sonunda güneş enerjisi ısıtma sisteminin daha ekonomik olduğu söylenebilir.

15. Uygulama



Ekonomik Aracı Seçme

İkişer kişilik gruplara ayrılarak aşağıda verilen problem durumunu inceleyiniz.

Yeni bir araba satın almak isteyen Kerem Bey, araştırmaları sonucunda seçenekleri A ve B markaları olarak ikiye indirmiştir. Arabalar zamanla değer kaybettiği için iki araba arasında bazı karşılaştırmalar yapmak istemektedir. Arabaların satış fiyatını ve yıllık değer kaybını gösteren bilgiler Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1

Araba Markası	Satış Fiyatı (TL)	Yıllık Değer Kaybı (TL)
A	1 200 000	12 000
B	1 320 000	20 000

Sizden Kerem Bey'in uygun arabayı seçmesine yardımcı olmanız beklenmektedir. Grup içinde her bir kişinin birer araba seçmesi koşuluyla A ve B arabalarını paylaşarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

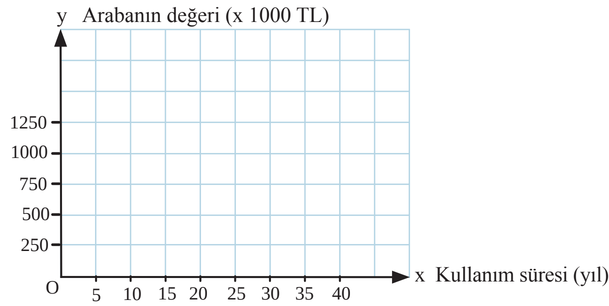
1. A ve B marka arabaların kullanım süresine (yıl) bağlı olarak değerlerindeki değişimi veren denklemleri yazınız.

2. 1. maddede elde ettiğiniz denklemlerden yararlanarak arabaların kullanım sürelerine göre değerlerini bulunuz ve Tablo 2'de uygun yerlere yazınız.

Tablo 2

Kullanım Süresi (Yıl)	A Marka Arabanın Değeri (TL)	B Marka Arabanın Değeri (TL)
5		
10		
15		
20		

3. A ve B marka arabaların kullanım süresine (yıl) bağlı olarak değerlerini (TL) gösteren grafikleri aşağıdaki dik koordinat sisteminde çiziniz.

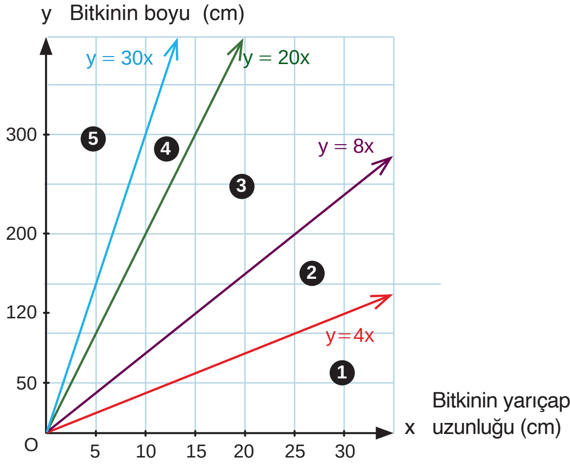


4. A ve B marka arabaların değerinin kaç yıl sonra eşit olacağını çizdiğiniz grafiklerden yararlanarak bulunuz.

5. A ve B marka arabaların değerinin kaç yıl sonra eşit olacağını cebirsel çözüm yaparak bulunuz.

6. Kerem Bey'e hangi arabayı almasının daha avantajlı olacağı söylenebilir? Nedenleri ile açıklayınız.

10. ÖRNEK



Yanda 5 kategoriye ayrılmış, gövde kesiti daire şeklinde olan bitkilerin gövdelerinin yarıçap uzunluğuna (cm) bağlı boylarını (cm) ifade eden grafik verilmiştir.

Örneğin 3. kategoride $y = 8x$ ve $y = 20x$ denklemleri ile verilen doğruların arasında kalan bölgedeki değerleri sağlayan bitki türleri bulunmaktadır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) 3. kategoride yarıçap uzunluğu 12,5 cm olan bir bitkinin boyunun hangi aralıkta değer alabileceğini bulunuz.

b) Boyu 120 cm ve 2. kategoride olan bir bitkinin yarıçap uzunluğunun hangi aralıkta değer alabileceğini bulunuz.

Çözüm

a) Yarıçap uzunluğu 12,5 cm olan bir bitki 3. kategoride ise bitkinin boyu y olmak üzere

$8x < y < 20x$ olmalıdır.

$x = 12{,}5$ cm için $8 \cdot (12{,}5) < y < 20 \cdot (12{,}5) \Rightarrow 100 < y < 250$ bulunur.

Bu durumda 3. kategoride yarıçap uzunluğu 12,5 cm olan bir bitkinin boyu $(100, 250)$nda değer alabilir.

b) Boyu 120 cm ve 2. kategoride olan bir bitkinin yarıçap uzunluğu x olmak üzere $\frac{y}{8} \leq x \leq \frac{y}{4}$ olmalıdır.

$y = 120$ cm için $\frac{120}{8} \leq x \leq \frac{120}{4} \Rightarrow 15 \leq x \leq 30$ bulunur.

Bu durumda boyu 120 cm ve 2. kategoride olan bir bitkinin yarıçap uzunluğu $[15, 30]$nda değer alabilir.

Proje Ödevi

Doğrusal Fonksiyonlarla İfade Edilebilen Denklem ve Eşitsizlikler

Bu projede sizden doğrusal fonksiyonlarla ifade edilebilen bir gerçek yaşam problemi belirlemeniz, belirlediğiniz problem için kullanılabilecek denklem veya eşitsizlikleri oluşturarak problemi çözmeniz, kullandığınız denklem ve eşitsizliklerin farklı problem durumlarında nasıl kullanılabileceğini belirlemeniz ve ödevinizi sınıfta sunmanız beklenmektedir.

Projeye başlamadan önce aşağıdaki hususlara dikkat ediniz.

- Doğrusal fonksiyonlar ile ifade edilebilen gerçek yaşam durumları belirleyiniz.
- Çözümünde doğrusal fonksiyonlarla ifade edilebilen bir denklem veya eşitsizlik kullanılan bir problem oluşturunuz.

Projeyi yaparken aşağıdaki hususlara dikkat ediniz.

- Oluşturduğunuz problem durumunun çözümünde kullanacağınız denklem veya eşitsizlikleri belirleyiniz.
- Belirlediğiniz denklem veya eşitsizliklerden yararlanarak probleminizi çözünüz.
- Probleminizin çözümünde denklem veya eşitsizlikleri ifade eden doğrusal fonksiyon grafiklerinden nasıl yararlanabileceğinizi belirleyiniz.
- Problemin çözümünde kullandığınız denklem veya eşitsizliklerin başka hangi problem durumlarında kullanılabileceğini belirleyerek projenizi raporlayınız.

Proje raporunun aşağıdaki alt başlıkları içermesine dikkat ediniz.

- Projenin amacı
- Kullanılan yöntem

Projenizi sunmak için hazırlayacağınız modelde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz.

- Gerçekleştirdiğiniz adımları sırasıyla anlatınız.
- Anlatımınızı ilgili görsellerle destekleyiniz.
- Türkçenin düzgün ve etkili biçimde kullanılmasına özen gösteriniz.

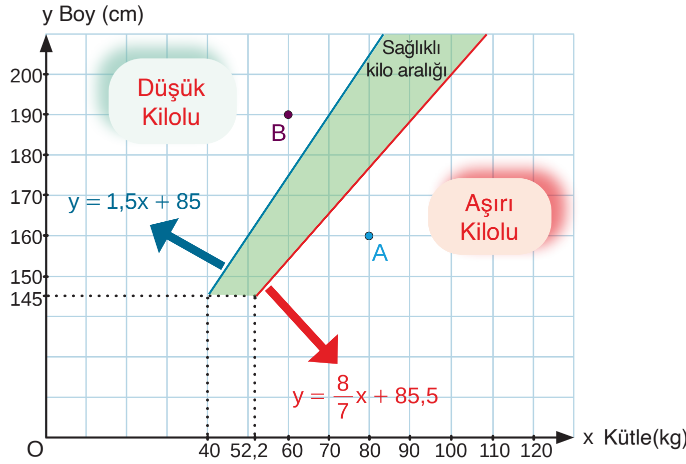
Çalışmanız proje değerlendirme formu ile değerlendirilecektir.

Proje değerlendirme formuna ulaşmak için karekodu okutunuz.



11. ÖRNEK

Yapılan araştırmalar sonucunda kadınlar için boya (cm) göre değişen sağlıklı kütle aralıkları belirlenmiştir. Aşağıdaki grafikte 19-34 yaş aralığındaki kadınlar için sağlıklı kilo aralıkları verilmiştir.



Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Kütlesi 70 kg olan bir kadının sağlıklı kilo aralığında olabilmesi için boyunun alabileceği değer aralığını bulunuz.

b) Boyu 170 cm olan bir kadının sağlıklı kilo aralığında olabilmesi için kütlesinin alabileceği değer aralığını bulunuz.

c) Grafikte işaretlenen $A(80, 160)$ noktası bir kadının kütlesini ve boyunu göstermektedir. Bu kadının sağlıklı kilo aralığında olabilmesi için kütlesi en az kaç kg azalmalıdır?

ç) Grafikte işaretlenen $B(60, 190)$ noktası bir kadının kütlesini ve boyunu göstermektedir. Bu kadının sağlıklı kilo aralığında olabilmesi için kütlesi en az kaç kg artmalıdır?

Çözüm

a) Kütlesi 70 kg olan bir kadının sağlıklı kilo aralığında olabilmesi için boyu y olmak üzere y nin alabileceği değer aralığı aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\frac{8}{7}x + 85{,}5 < y < 1{,}5x + 85$$

$x = 70$ kg için $\frac{8}{7} \cdot 70 + 85{,}5 < y < (1{,}5) \cdot 70 + 85 \Rightarrow 165{,}5 < y < 190$ olur.

Buna göre kütlesi 70 kg olan bir kadının sağlıklı kilo aralığında olabilmesi için boyunun alabileceği değerler $(165{,}5\ ,\ 190)$nda olmalıdır.

b) 170 cm boyundaki bir kadının sağlıklı kilo aralığında olması için kütlesi x olmak üzere x in aralığı yaklaşık olarak aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\frac{y - 85}{1{,}5} < x < \frac{7}{8}(y - 85{,}5)$$

$y = 170$ cm için $\frac{170 - 85}{1{,}5} < x < \frac{7}{8}(170 - 85{,}5) \Rightarrow 57 < x < 74$ olur.

Buna göre boyu 170 cm olan bir kadının sağlıklı kilo aralığı $(57,\ 74)$ olmalıdır.



c) Kütle ve boy değerleri A(80, 160) noktası ile ifade edilen kadının boyu 160 cm'dir. Boyu 160 cm olan bir kadının sağlıklı kilo aralığında olması için gereken en büyük kütle değeri bulunmalıdır.

$$160 = \frac{8}{7} \cdot x + 85{,}5 \Rightarrow 160 - 85{,}5 = \frac{8}{7}x$$

$$\Rightarrow 74{,}5 = \frac{8}{7}x$$

$$\Rightarrow x = 74{,}5 \cdot \frac{7}{8} \approx 65 \text{ kg bulunur.}$$

Bu kadının sağlıklı kilo aralığında olması için kütlesinin en az 80 − 65 = 15 kg azalması gerekir.

ç) Kütle ve boy değerleri B(60, 190) noktası ile ifade edilen kadının boyu 190 cm'dir. Boyu 190 cm olan bir kadının sağlıklı kilo aralığında olması için gereken en büyük kütle değeri bulunmalıdır.

$$190 = 1{,}5 \cdot x + 85 \Rightarrow 190 - 85 = 1{,}5x$$

$$\Rightarrow 105 = 1{,}5x$$

$$\Rightarrow x = \frac{105}{1{,}5} = 70 \text{ kg bulunur.}$$

Bu kadının sağlıklı kilo aralığında olması için kütlesinin 70 − 60 = 10 kg artması gerekmektedir.

12. ÖRNEK

Şişme bot üreten bir fabrikanın kurulum maliyeti 300 000 Türk lirasıdır. Üretilen bir şişme botun maliyeti 1300 Türk lirası, satış fiyatı 2500 Türk lirasıdır.
Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) x adet şişme bot üretmenin maliyetini modelleyen fonksiyonu yazınız.

b) x adet şişme bot satışından elde edilen geliri modelleyen fonksiyonu yazınız.

c) Fabrikanın maliyet ve gelirinin eşit olması için kaç adet şişme bot satması gerektiğini bulunuz.

ç) Fabrikanın kâr edebilmesi için en az kaç adet bot satması gerektiğini bulunuz.

Çözüm

a) Maliyet fonksiyonu $m(x) = 300\,000 + 1300x$ olur.

b) Gelir fonksiyonu $g(x) = 2500x$ olur.

c) Maliyet ve gelir fonksiyonları birbirine eşitlenerek x değeri bulunur.

$$m(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow 300\,000 + 1300x = 2500x$$

$$\Rightarrow 300\,000 = 2500x - 1300x$$

$$\Rightarrow 300\,000 = 1200x$$

$$\Rightarrow x = \frac{300\,000}{1200} = 250 \text{ adet bot satıldığında gelir ve maliyet değerleri eşit olur.}$$

ç) $x > 250$ için $g(x) > m(x)$ olur ve buna göre fabrikanın kâr etmesi için en az 251 adet bot satması gerekir.

6. Sıra Sizde

Spor ayakkabı üreten bir firmanın kurulum maliyeti 200 000 TL'dir. Bir çift spor ayakkabının üretim maliyeti 1400 TL'dir. Firma, spor ayakkabıların çiftini 1800 TL'den satmaktadır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) x çift spor ayakkabı üretmenin maliyetini modelleyen fonksiyonu yazınız.

b) x çift spor ayakkabı satışından elde edilen geliri modelleyen fonksiyonu yazınız.

c) Kaç çift spor ayakkabı sattıktan sonra firmanın gelirinin toplam maliyetine eşit olacağını bulunuz.

ç) Firmanın kâr edebilmesi için kaç çift spor ayakkabı satması gerektiğini bulunuz.

Mutlak Değerli Denklem ve Eşitsizlik İçeren Problemler

16. Uygulama

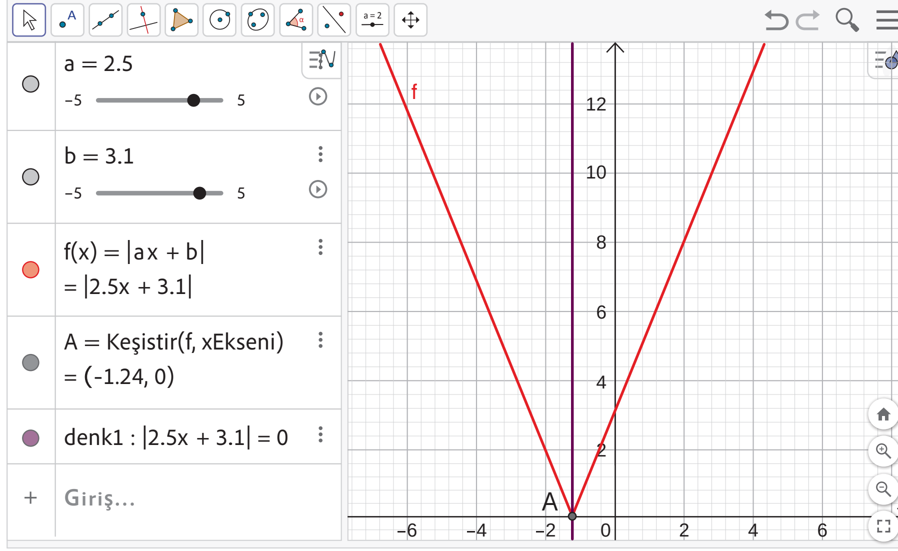


Teknoloji Uygulaması

Matematik yazılımını açarak aşağıdaki adımları sırasıyla uygulayınız.

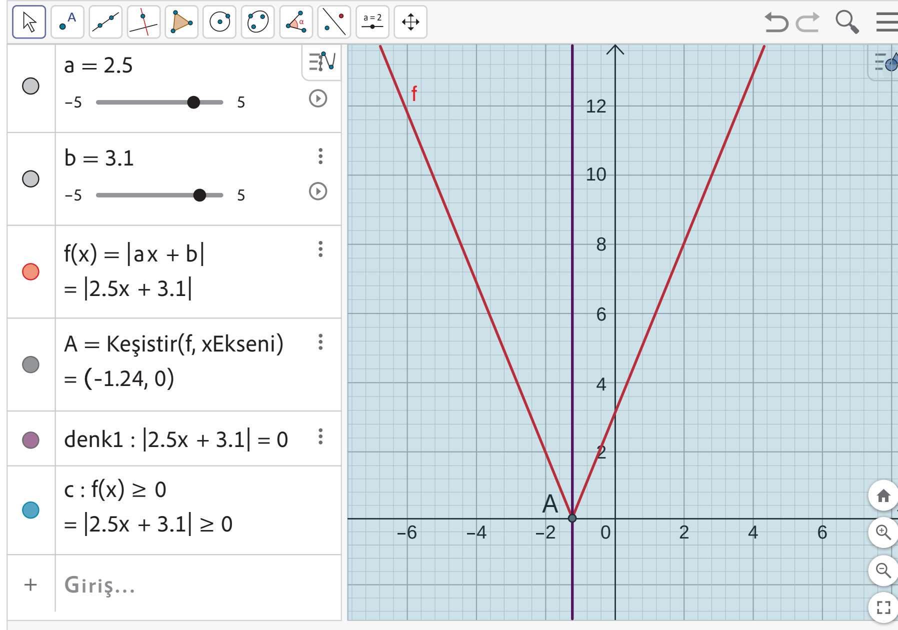
1. **Giriş** bölümüne $\mathbf{f(x) = |ax + b|}$ yazıp **Enter** tuşuna basınız. Ekranda f fonksiyonunun grafiği ile a ve b sürgüleri oluşacaktır.
2. **Kesiştir** aracını seçip sırasıyla f doğrusunu ve x eksenini işaretleyiniz. Ekranda f doğrusunun x eksenini kestiği nokta oluşacaktır.

3. **Giriş** bölümüne $|\mathbf{ax + b}| = \mathbf{0}$ yazıp **Enter** tuşuna basınız. Ekranda denk1 doğrusu oluşacaktır (Görsel 1).



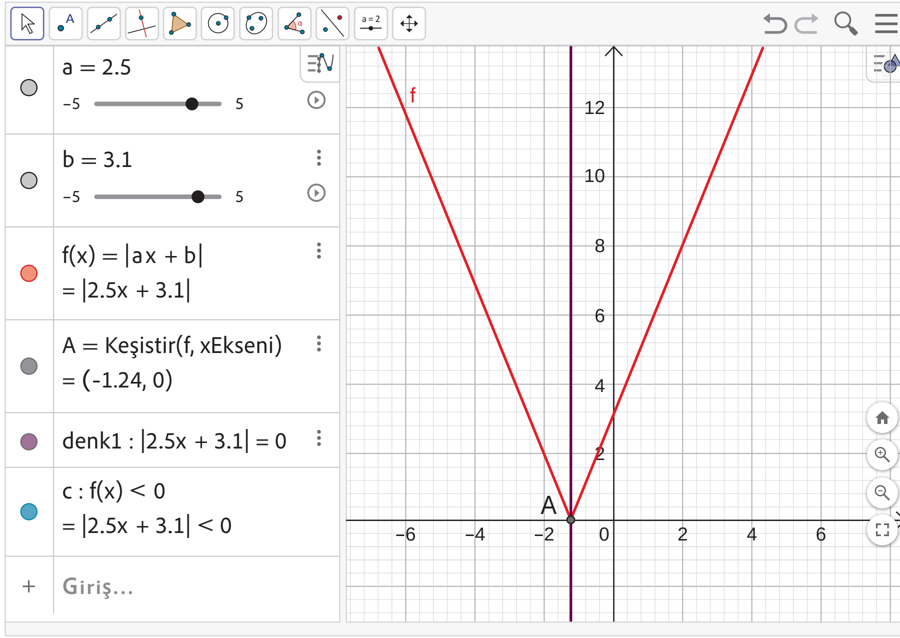
Görsel 1

4. **Giriş** bölümüne **f(x) ≥ 0** yazıp **Enter** tuşuna basınız. Ekranda f(x) ≥ 0 eşitsizliğinin çözüm aralığı oluşacaktır (Görsel 2).



Görsel 2

5. **Giriş** bölümüne **f(x) < 0** yazıp **Enter** tuşuna basınız. Ekranda f(x) < 0 eşitsizliğinin çözüm aralığı oluşacaktır (Görsel 3).



Görsel 3

6. a ve b sürgülerini hareket ettirerek değişimleri gözlemleyiniz.
Gözlemlerinizden yararlanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) $|ax + b| = 0$ denkleminin kökü ile f fonksiyonunun sıfırı arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklayınız.

b) f fonksiyonunun işaret tablosunu doldurunuz. İşaret tablosu ile Görsel 2 ve Görsel 3'te $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ eşitsizliklerinin çözüm aralıkları ile ilgili çıkarımlarınız ne olur? Gerekçelerinizle açıklayınız.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	∞
f(x)		0	

c) $f(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesini ve $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$ eşitsizliklerinin çözüm aralıklarını bulmak için f fonksiyonunun grafik veya cebirsel temsilini kullanarak çözüm stratejileri oluşturunuz.

17. Uygulama



$|f(x)| = k, |f(x)| \geq k, |f(x)| > k, |f(x)| \leq k, |f(x)| < k$ $(k \in \mathbb{R})$ Şeklinde Tanımlı Denklem ve Eşitsizlikler

Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

Neslihan ve Mustafa herhangi bir nesnenin kütlesini tahmin ettikleri bir oyun oynamaktadır. Tahmin eden kişinin söyleyeceği sayı nesnenin gerçek kütlesinden 50 gram eksik ya da 50 gram fazla olursa o kişi oyunu kazanmaktadır. Neslihan Mustafa'ya bir nesne göstererek bu nesnenin kütlesini tahmin etmesini istiyor. Nesnenin kütlesinin 1350 gram olduğu biliniyor.

1. Problem: Oyunu Mustafa kazandığına göre Mustafa hangi sayıları söylemiş olabilir?

a) Mutlak değer fonksiyonlarını kullanarak yukarıdaki problem durumunu cebirsel temsillerle nasıl ifade edersiniz? Bulduğunuz cebirsel temsillerin problem bağlamındaki anlamını ifade ediniz.

b) Bulduğunuz cebirsel temsillerin problemin çözümünde nasıl kullanılabileceğini sınıf arkadaşlarınızla tartışınız. Çözüm için strateji oluşturarak problemi çözünüz.

c) Mutlak değerli fonksiyonları kullanarak yukarıdaki problem durumunu grafik temsiliyle nasıl ifade edersiniz? Bulduğunuz grafik temsilinin problem bağlamındaki anlamını ifade ediniz.

ç) Bulduğunuz grafik temsilinin problemin çözümünde nasıl kullanılabileceğini sınıf arkadaşlarınızla tartışınız. Çözüm için strateji oluşturarak problemi çözünüz.

d) 1. problemin çözümünde kullandığınız yöntemleri karşılaştırarak çözümlerinizi doğrulayınız.

e) 1. problemin çözümünde kullandığınız yöntemleri mutlak değer fonksiyonu içeren farklı problem durumları için nasıl kullanabilirsiniz? Genellemenizi oluşturunuz.

f) Oluşturduğunuz genellemeyi sözel, cebirsel ve grafiksel olarak değerlendiriniz.

g) 1. problem için verilen adımları 2 ve 3. problemler için uygulayınız.

2. Problem: Oyunu Mustafa kaybettiğine göre Mustafa hangi sayıları söylemiş olabilir?

3. Problem: Mustafa'nın oyunu kazanması için söyleyebileceği en küçük sayı ile en büyük sayı kaçtır?

Mutlak değer içeren problemlerin çözümünde mutlak değer fonksiyonları yardımıyla elde edilen denklem ve eşitsizlikler kullanılır. f ve g doğrusal fonksiyonlar olmak üzere
$|f(x)| = g(x), |f(x)| \geq g(x), |f(x)| > g(x), |f(x)| \leq g(x)$ ve $|f(x)| < g(x)$ gibi ifadeler yardımıyla problem çözümüne ulaşılabilir.

$g(x) = k \; (k \in \mathbb{R},\; k \neq 0)$ şeklinde sabit fonksiyon olduğunda yukarıdaki denklem ve eşitsizlikler

$|f(x)| = k, |f(x)| \geq k, |f(x)| > k, |f(x)| \leq k$ ve $|f(x)| < k$ biçimine dönüşür.

Özel olarak $g(x) = 0$ olduğunda

$|f(x)| = 0, |f(x)| \geq 0, |f(x)| > 0, |f(x)| \leq 0$ ve $|f(x)| < 0$ biçimindeki denklem ve eşitsizlikler elde edilir.

13. ÖRNEK



Mühendislikte yapıların bileşenlerinin kabul edilebilir ölçülerinin aralığı için tolerans terimi kullanılır. Tolerans, üretilen parçaların üretilmesi gereken değerden sapma miktarı (hata payı) olarak da ifade edilmektedir.

Mil, rulman, dişli gibi makine parçaları büyüklüklerine göre farklı tolerans ile üretilir. Görseldeki rulmanlar, çap uzunluğu 60 mm $\pm$ 0,05 mm olacak şekilde üretilmektedir.

Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Üretilecek bir rulmanın çap uzunluğuna bağlı hata miktarını veren fonksiyonu cebirsel ve grafik temsiliyle ifade ediniz.

b) Üretilen bir rulmanın çap uzunluğunun istenen ölçüde üretilip üretilmediğini, uygun ölçülerde üretilen bir rulmanın çap uzunluğunun alabileceği en büyük ve en küçük değeri belirleyecek çözüm stratejileri oluşturunuz.

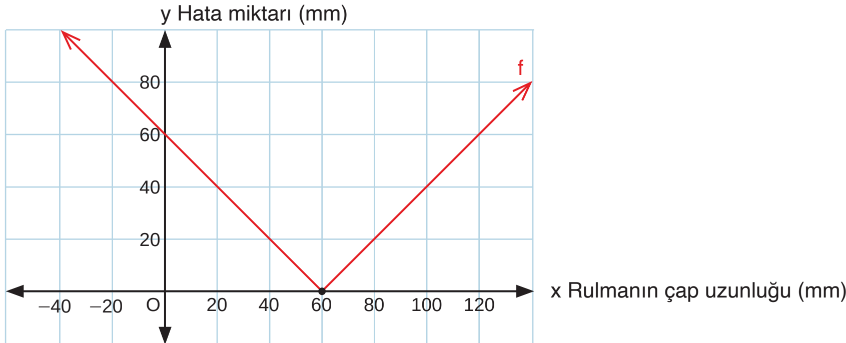
c) Belirlediğiniz stratejileri kullanarak problemleri çözünüz.

ç) Elde ettiğiniz çözümleri farklı yöntemlerle doğrulayınız.

d) Problemin farklı çözüm yöntemlerini ilişkilendirerek elde ettiğiniz çıkarımları değerlendiriniz.

Çözüm

a) Üretilen bir rulmanın çap uzunluğu x mm olsun. x, fonksiyonun bağımsız değişkeni olur. Hata miktarı, x e bağlı olarak değiştiğinden fonksiyonun bağımlı değişkenidir. x e bağlı hata miktarını veren fonksiyonun kuralı $f(x) = |60 - x|$ olur.
f fonksiyonunun grafik temsili aşağıdaki şekilde çizilir.



b)
- Üretilen bir rulmanın çap uzunluğunun istenilen ölçüde olması için hata miktarının en fazla 0,05 olması gerekmektedir. Buradan uygun rulmanların çap uzunluğunun alabileceği değerler, $f(x) \leq 0,05 \Rightarrow |60 - x| \leq 0,05$ eşitsizliğini sağlar.
- Çap uzunluğu $|60 - x| > 0,05$ aralığını sağlayan değerler için de üretilen rulmanlar uygun ölçüde değildir.
- Ölçüsü uygun olarak üretilen bir rulmanın çap uzunluğunun alabileceği en büyük ve en küçük değerler için hata miktarı en fazladır. Buradan en büyük ve en küçük değerler için $|60 - x| = 0,05$ denklemini sağlayan değerler bulunabilir.



c) • $|60-x| \leq 0,05$ eşitsizliğinin cebirsel çözümü için f fonksiyonu, parçalı gösterimli fonksiyon olarak yazılır.

$$f(x)=\begin{cases}60-x, & x<60\\ x-60, & x\geq 60\end{cases}$$

Parçalı olarak yazılan cebirsel temsiller için ayrı ayrı eşitsizlikler çözüldüğünde

$|60-x| \leq 0,05 \Rightarrow 60-0,05 \leq x \Rightarrow 59,95 \leq x$

$|x-60| \leq 0,05 \Rightarrow x \leq 0,05+60 \Rightarrow x \leq 60,05$ bulunur.

İki eşitsizlik birlikte yazılarak x in alacağı değerlerin kümesi $59,95 \leq x \leq 60,05$ olur. Bulunan çözüm kümesi [59,95 , 60,05] olarak da gösterilebilir.

[59,95 , 60,05] dışındaki değerler için rulmanların çap uzunluğunun uygun ölçüde olmadığı söylenebilir. Buradan $|60-x| > 0,05$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $\mathbb{R}-$ [59,95 , 60,05] olur.

• Ölçüsü uygun olarak üretilen bir rulmanın çap uzunluğunun alacağı en büyük değer ve en küçük değer için $|60-x| = 0,05$ denklemini çözmek için parçalı gösterimli fonksiyonun cebirsel temsilleri sırasıyla 0,05'e eşitlendiğinde

$60-x=0,05 \Rightarrow x=60-0,05 \Rightarrow x=59,95$ en küçük değer,

$x-60=0,05 \Rightarrow x=60+0,05 \Rightarrow x=60,05$ en büyük değer olur.

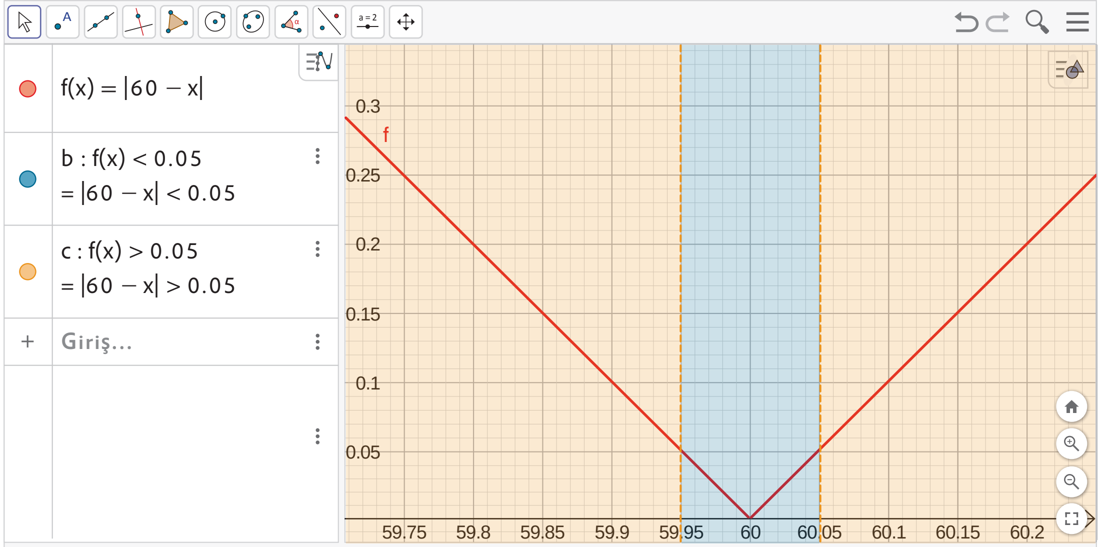
ç) Mutlak değerli denklem ve eşitsizliklerin cebirsel çözümleri grafik çözümleriyle doğrulanabilir.

• $|60-x| \leq 0,05$ ve $|60-x| > 0,05$ grafik çözümü için matematik yazılımından faydalanılabilir. Bunun için

i) Giriş bölümüne $f(x)=|60-x|$ yazılıp **Enter** tuşuna basılır.

ii) Giriş bölümüne $f(x) \leq 0,05$ yazılıp **Enter** tuşuna basılır.

iii) Giriş bölümüne $f(x) > 0,05$ yazılıp **Enter** tuşuna basılır.

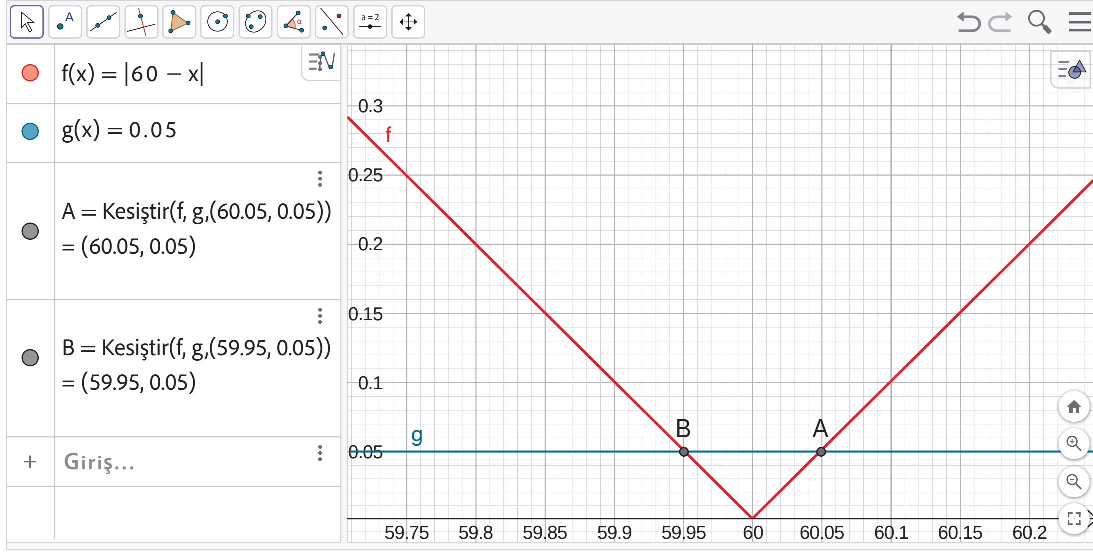


Görsel 1

Görsel 1'de mavi renkli bölümdeki x değerleri [59,95 , 60,05] nda bulunmaktadır. Bu aralığın $|60-x| \leq 0,05$ eşitsizliğinin çözüm kümesine eşit olduğu sonucuna varılır.

Turuncu renkli bölümdeki x değerleri $(-\infty, 59{,}95) \cup (60{,}05, \infty)$nda bulunmaktadır. Bu aralığın $|60-x| > 0{,}05$ eşitsizliğinin çözüm kümesine eşit olduğu sonucuna varılır.

- $|60-x| = 0{,}05$ denkleminin grafik çözümü için matematik yazılımından faydalanılabilir. Bunun için
  i) Giriş bölümüne $f(x) = |60-x|$ yazılıp **Enter** tuşuna basılır.
  ii) Giriş bölümüne $g(x) = 0{,}05$ yazılıp **Enter** tuşuna basılır.
  iii) Kesiştir aracı seçilerek grafik ekranındaki f ve g fonksiyonlarının grafikleri üzerine tıklanır.



Görsel 2

Görsel 2 incelendiğinde f ve g fonksiyonların grafiklerinin kesim noktalarının $A(60{,}05\,,\ 0{,}05)$ ve $B(59{,}95\,,\ 0{,}05)$ olduğu görülmektedir. A ve B noktalarının apsis değerleri, $f(x) = g(x) \Rightarrow |60-x| = 0{,}05$ denkleminin köklerini ifade eder. Cebirsel çözümdekine benzer şekilde bu denklemin iki tane kökü bulunmaktadır.

d) Mutlak değerli fonksiyon içeren denklem ve eşitsizlikler, cebirsel veya grafiksel temsiller yardımıyla çözülebilir. Mutlak değerli fonksiyon parçalı olarak iki farklı cebirsel temsille ifade edildiğinden her temsil için bir çözüm yapılır. f ve g fonksiyonlarının kesim noktalarının apsis değerleri, cebirsel çözümde elde edilen denklemin kökünü ifade eder.

18. Uygulama

$|f(x)| = g(x), |f(x)| \geq g(x), |f(x)| > g(x), |f(x)| \leq g(x), |f(x)| < g(x)$ Biçimindeki Denklem ve Eşitsizlikler

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

Tabloda gerçek sayılarda tanımlı f, g ve h fonksiyonları verilmiştir.

Fonksiyon	Cebirsel Temsil
f	$f(x) = x$
g	$g(x) = 3x - 5$
h	$h(x) = \lvert g(x) - 4 \rvert$

1. Problem: g(x)=h(x) eşitliğini sağlayan x gerçek sayı değerleri nelerdir?

a) Mutlak değer fonksiyonlarını kullanarak 1. problemi cebirsel temsillerle nasıl ifade edersiniz? Bulduğunuz cebirsel temsillerin problem bağlamındaki anlamını ifade ediniz.

b) Elde ettiğiniz cebirsel temsillerin 1. problemin çözümünde nasıl kullanılabileceğini sınıf arkadaşlarınızla tartışınız. Çözüm için strateji oluşturarak problemi çözünüz.

c) Mutlak değer fonksiyonlarını kullanarak 1. problemi grafik temsiliyle nasıl ifade edersiniz? Bulduğunuz grafik temsilinin problem bağlamındaki anlamını ifade ediniz.

ç) Elde ettiğiniz grafik temsilinin 1. problemin çözümünde nasıl kullanılabileceğini sınıf arkadaşlarınızla tartışınız. Çözüm için strateji oluşturarak problemi çözünüz.

d) 1. problemin çözümünde kullandığınız yöntemleri karşılaştırarak çözümlerinizi doğrulayınız.

e) 1. problemin çözümünde kullandığınız yöntemleri mutlak değer fonksiyonu içeren farklı problem durumları için nasıl kullanabilirsiniz? Genellemenizi oluşturunuz.

f) Oluşturduğunuz genellemeyi sözel, cebirsel ve grafiksel olarak değerlendiriniz.

2. Problem: $g(x) < h(x)$ eşitsizliğini sağlayan gerçek sayı değerleri kaçtır ?

1. problem için verilen adımları 2. problem için uygulayınız.

14. ÖRNEK

Alanı $(4x^2 + 12x + 9)$ cm^2 olan karenin bir kenar uzunluğu, $(3x - 1)$ cm olarak veriliyor.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Karenin bir kenar uzunluğunu mutlak değer fonksiyonlarının cebirsel temsilleri yardımıyla belirleyiniz.

b) Bulduğunuz sonucu grafik temsilleriyle doğrulayınız.

c) Problemin farklı çözüm yöntemlerini ilişkilendirerek elde ettiğiniz çıkarımları değerlendiriniz.

Çözüm

a) Alanı $(4x^2+12x+9)$ cm^2 olan karenin bir kenar uzunluğu,

$\sqrt{4x^2+12x+9}=\sqrt{(2x+3)^2}=|2x+3|$cm olur. Karenin kenar uzunluklarını ifade eden cebirsel ifadeler birbirine eşitlendiğinde $|2x+3|=3x-1$ denklemi elde edilir.

Elde edilen denklemin sol tarafı parçalı hâle getirilerek her cebirsel temsil için denklemler ayrı ayrı çözülür.

$2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ olmak üzere $x<-\frac{3}{2}$ için $-2x-3=3x-1 \Rightarrow 5x=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{5}$,

$x \geq -\frac{3}{2}$ için $2x+3=3x-1 \Rightarrow x=4$ bulunur.

Bulunan $x=-\frac{2}{5}$ değeri, $x<-\frac{3}{2}$ şartını sağlamaz. Bu nedenle çözüme alınmaz.

$x=4$ değeri, $x \geq -\frac{3}{2}$ şartını sağlar. Buradan çözüm kümesi $\{4\}$ olur. Karenin bir kenar uzunluğu,

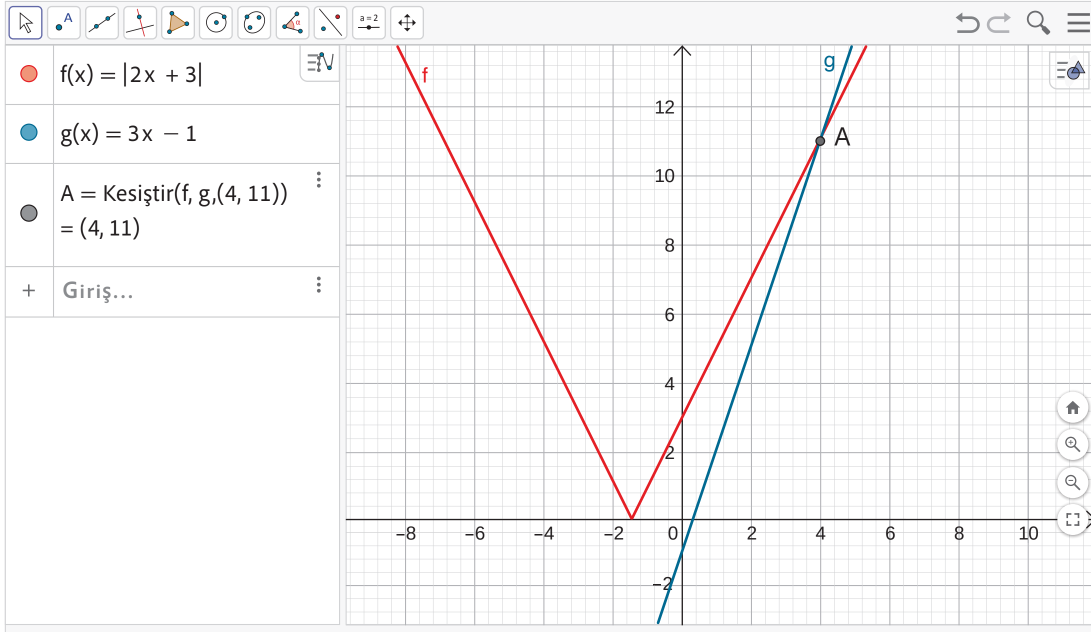
$3x-1=3 \cdot 4-1=11$cm bulunur.

b) $|2x+3|=3x-1$ denkleminin grafik çözümü için matematik yazılımından faydalanılabilir. Bunun için

i) Giriş bölümüne $f(x)=|2x+3|$ yazılıp **Enter** tuşuna basılır.

ii) Giriş bölümüne $g(x)=3x-1$ yazılıp **Enter** tuşuna basılır.

iii) Kesiştir aracı seçilerek grafik ekranındaki f ve g fonksiyonlarının grafikleri üzerine tıklanır.



Görsel incelendiğinde fonksiyonların grafiklerinin kesim noktasının $A(4, 11)$ olduğu görülür. A noktasının apsis değeri, $f(x)=g(x) \Rightarrow |2x+3|=3x-1$ denkleminin kökünü ifade eder. Cebirsel çözümdekine benzer şekilde bu denklemin bir tane kökü bulunmaktadır.

c) Cebirsel temsille iki farklı kök elde edilmiştir. x için belirlenen aralıkları sağlayıp sağlamadığı kontrol edildikten sonra bulunan değerlerden biri çözüm kümesine alınmıştır. Grafik çözümünde f ve g fonksiyonlarının tek noktada kesişmesi, denklemin bir kökü olduğunu doğrulamıştır. Mutlak değerli denklemler cebirsel temsillerle çözüldüğünde bu denklemlerin x için belirlenen aralığı sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir.



Alıştırmalar

1-4. soruları aşağıdaki bilgilerden yararlanarak cevaplayınız.

Bir firma, veri güvenliğini sağlamak amacıyla virüs koruma programı satın almak istemektedir. Firmanın incelediği M ve N programları için kurulum ve aylık kullanım ücretleri (TL) aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	M	N
Kurulum Ücreti (TL)	1500	600
Aylık Ücret (TL)	200	250

M programı için kullanım süresine bağlı (ay) ödenecek ücreti (TL) gösteren fonksiyon f, N programı için kullanım süresine bağlı (ay) ödenecek ücreti (TL) gösteren fonksiyon g olsun.

1. **Tanım ve görüntü kümelerini belirleyerek f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsilini bulunuz.**

2. Firma, satın aldığı virüs koruma programını 1 yıl kullanacaktır.

   Firmanın hangi programı seçmesinin daha ekonomik olacağını belirleyiniz.

3. **Matematik yazılımı yardımıyla f ve g fonksiyonlarının grafiklerini çizerek iki program için ödenecek ücretin kaç Türk lirasında eşitlendiğini bulunuz.**

4. **İki programa ödenecek ücretin kaç aylık kullanım sonunda birbirine eşit olacağını bulunuz.**

5-6. soruları aşağıdaki bilgilerden yararlanarak cevaplayınız.

Bir ilkokuldaki asansörün yük taşıma kapasitesi 720 kg'dır ve asansörde çocuklara refakat eden bir yetişkinin bulunması zorunludur. Bir çocuğun ortalama kütlesi 30 kg ve asansörde çocuklara refakat eden yetişkinin kütlesi 80 kg'dır.

5. **Asansörün aşırı yüklenmesini önlemek amacıyla bir uyarı yazısı hazırlanacaktır. x asansöre binen kişilerin toplam kütlesini (kg) göstermek üzere aşırı yükleme durumunu ifade eden eşitsizliği yazınız.**

6. **Asansörün refakatçi ile birlikte en fazla kaç çocuğu taşıyabileceğini bulunuz.**

7. Doruk saat 08.00'de evden çıkıp evine 1,2 km uzaklıkta bulunan okuluna sabit hızla 16 dakikada yürümüştür. Okula gittikten hemen sonra cüzdanını unuttuğunu fark edip aynı sabit hızla eve geri dönmüş ve cüzdanını almıştır.

Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Doruk'un zamana (dk.) bağlı okula olan mesafesini (km) modelleyen fonksiyonu cebirsel ve grafik temsiliyle ifade ediniz.

b) Doruk'un okula olan mesafesinin 400 metreden az olduğu saat aralığını belirleyecek çözüm stratejileri oluşturunuz.

c) Belirlediğiniz stratejileri kullanarak problemi çözünüz.

ç) Elde ettiğiniz çözümü farklı yöntemlerle doğrulayınız.

d) Problemin farklı çözüm yöntemlerini ilişkilendirerek elde ettiğiniz çıkarımları değerlendiriniz.

Farklı Kaydet



Bu temada öğrendiğiniz bilgileri kendi hatırlayacağınız şekilde bu alana kısaca not edebilirsiniz.



Ölçme ve Değerlendirme

Bu bölümde cevaplamanız için farklı soru tiplerinde 19 adet soru bulunmaktadır.
Ölçme ve değerlendirme bölümünün sonunda verilen karekodu okutarak ek sorulara ulaşabilirsiniz.

1. Yüksekliği 200 cm olan dik dairesel silindir şeklindeki boş bir su tankına su doldurulmaktadır. 1 dakika boyunca sabit hızla su doldurulduğunda tanktaki suyun yüksekliği 1 cm olmaktadır. Tanka su doldurulmaya başlandığı andan itibaren zamana (dk.) bağlı olarak tanktaki suyun yüksekliğinin (cm) değişimini gösteren fonksiyon f olsun.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) f fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

b) f fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

c) f fonksiyonunun grafik temsilini oluşturunuz.

ç) Tanımlı olduğu aralıkta f fonksiyonunun bire bir olup olmadığını bulunuz.

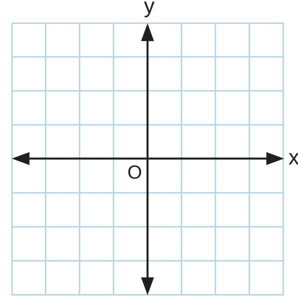
d) f fonksiyonunun sıfırını ve işaretini belirleyiniz.

2. Kenar uzunlukları 4 cm ve x cm olan bir dikdörtgen veriliyor. $x \geq 1$ olmak üzere x e (cm) bağlı olarak dikdörtgenin çevre uzunluğunun (cm) değişimini gösteren fonksiyon f olsun.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) f fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bularak fonksiyonun cebirsel temsilini yazınız.

b) f fonksiyonunun grafik temsilini oluşturunuz.

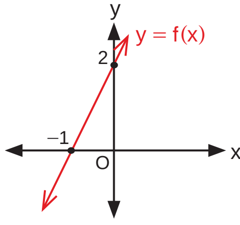


c) f fonksiyonunun işaretini inceleyiniz.

ç) f fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları belirleyiniz.

d) f fonksiyonunun bire bir olup olmadığını bulunuz.

3. Gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

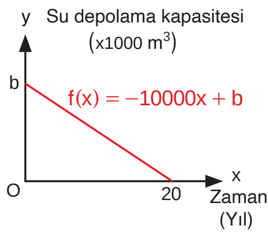
a) f fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

b) f fonksiyonunun grafiğinin eğimini bulunuz.

c) f fonksiyonunun sıfırını bulunuz.

ç) f fonksiyonunun işaretini bulunuz.

4. Bir barajın su depolama kapasitesi, o barajda depolanabilecek maksimum su miktarını ifade eder. Bu kapasite erozyon, kirlilik gibi etkenlerden dolayı zamanla azalmaktadır.



Yandaki grafikte bir barajın zamana (yıl) bağlı su depolama kapasitesinin (m^3) değişimi;

$b \in \mathbb{R}$, $f: [0, 20] \longrightarrow [0, b]$, $f(x) = -10000x + b$ şeklinde tanımlı f doğrusal fonksiyonu ile ifade edilmiştir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Barajın su depolama kapasitesinin en fazla kaç m^3 olduğunu hesaplayınız.

b) Hangi yılın sonunda barajın su depolama kapasitesinin en az olduğunu bulunuz.

c) Barajın zamana (yıl) bağlı su depolama kapasitesinin (m^3) değişim oranını bulunuz.

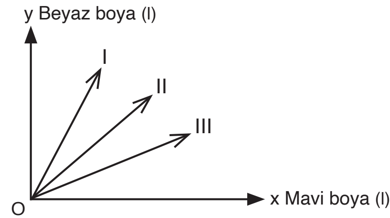
5. Bir boyacı, mavi ve beyaz renkleri belirli oranlarda karıştırarak K, L ve M renklerini elde ediyor. K, L ve M renklerini elde etmek için kullanılan mavi ve beyaz boyaların miktarları arasındaki ilişki; $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere sırasıyla uygun aralıkta $f(x) = ax$, $g(x) = bx$ ve $h(x) = cx$ şeklinde tanımlı doğrusal fonksiyonlar ile ifade ediliyor.

K, L ve M renklerini elde etmek için kullanılan mavi ve beyaz boya miktarları arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

- K rengini elde etmek için kullanılan mavi boya miktarı, beyaz boya miktarından azdır.
- L rengini elde etmek için kullanılan mavi boya miktarı, beyaz boya miktarına eşittir.
- M rengini elde etmek için kullanılan mavi boya miktarı, beyaz boya miktarından fazladır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

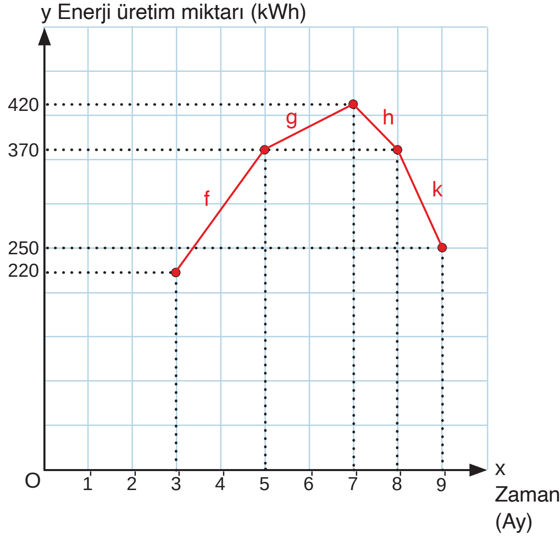
a) Aşağıdaki dik koordinat sisteminde f, g ve h fonksiyonlarının grafik temsilleri verilmiştir. Verilen grafiklerin hangi fonksiyona ait olduğunu bulunuz.



b) b katsayısının alacağı değeri bulunuz.

c) a ve c katsayılarının alabileceği değerlerin aralıklarını bulunuz.

6. Aşağıdaki grafikte bir güneş enerjisi panelinin zamana (ay) bağlı enerji (kWh) üretim miktarı uygun aralıkta tanımlı f, g, h ve k doğrusal fonksiyonlarıyla ifade edilmiştir.



Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Hangi aylar arasında enerji üretim miktarının arttığını bulunuz.

b) Hangi aylar arasında enerji üretim miktarının azaldığını bulunuz.

c) 7 ve 8. ay ile 8 ve 9. ay arasındaki enerji üretim miktarlarını karşılaştırınız.

ç) 3. aydan 9. aya kadar zamana (ay) bağlı enerji üretim miktarını (kWh) temsil eden parçalı gösterimli fonksiyonun cebirsel temsilini ifade ediniz.

7. Bir fabrikada yaklaşık 180 ml olarak dolum yapılan kutu sütlerin gerçek hacimlerinde belirli bir hata payı olabileceği öngörülmektedir. Bu hata payının en fazla 5 ml olduğu bilindiğinden bir kutu sütün gerçek hacminin $[175, 185]$ nda olduğu ifade edilmektedir. Bir kutu sütün gerçek hacmine (ml) bağlı hata payını (ml) ifade eden fonksiyon f olsun.

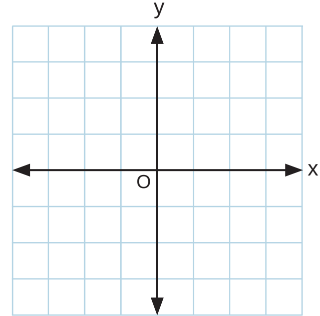
Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) f fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini belirleyiniz.

b) f mutlak değer fonksiyonunu cebirsel olarak ifade ediniz.

c) f fonksiyonunun sıfırını bulup f fonksiyonunun parçalı gösterimini yazınız.

ç) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



d) f fonksiyonunun bire bir olup olmadığını bulunuz.

8. Görseldeki gibi aralarında 36 m bulunan Ayhan ve Bilge, saat 12.05'te aynı anda harekete başlayarak aynı yönde 24 dakika boyunca sabit hızla bisiklet sürmüştür. A noktasından harekete başlayan Ayhan'ın dakikada 30 m, B noktasından harekete başlayan Bilge'nin dakikada 27 m yol aldığı bilinmektedir.



Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) **Ayhan ve Bilge'nin zamana bağlı aralarındaki mesafeyi modelleyen fonksiyonu farklı temsillerle gösteriniz.**

b) **Fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerini, fonksiyonun sıfırını belirleyerek problem bağlamındaki anlamını ifade ediniz.**

c) **Ayhan ve Bilge'nin aralarındaki mesafe 12 metre olduğunda saatin kaçı göstereceğini bulunuz.**

ç) **Ayhan ve Bilge'nin aralarındaki mesafenin 6 metre ve 6 metreden daha fazla olduğu anlarda saatin gösterdiği değerlerin aralığını bulunuz.**

9. $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere gerçek sayılarda tanımlı, cebirsel temsilleri $g(x) = |-3x + b_1|$, $h(x) = |-3x + b_2|$ ve $k(x) = |-3x + b_3|$ olan g, h ve k fonksiyonları veriliyor. g, h ve k fonksiyonlarının sıfırları sırasıyla x_1, x_2, x_3 olmak üzere $x_2 < x_1 < x_3$ şeklindedir.

Buna göre b_1, b_2 ve b_3 değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

10. 100 gram tereyağında ortalama 215 miligram, 100 gram kırmızı ette ortalama 65 miligram kolesterol vardır.

Tereyağı ve etten oluşan bir öğünde hastanın 320 miligramdan fazla kolesterol almasına izin verilmemektedir.

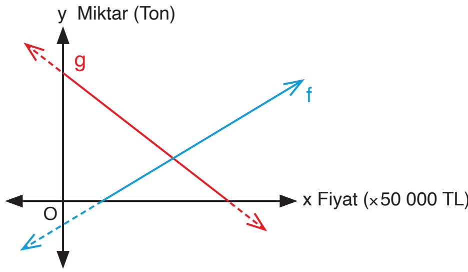
Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) **Hastanın bir öğünde tüketeceği 200 gram et ve x gram tereyağı için kolesterol kısıtlamasını ifade eden eşitsizliği yazınız.**

b) **Hastanın kolesterol kısıtlamasına uyması için bir öğünde yiyeceği 390 gram etle birlikte tüketeceği tereyağı miktarının <u>en fazla</u> kaç gram olabileceğini yaklaşık olarak bulunuz (Yaklaşık değer için virgülden sonra iki basamak alınız.).**

11. Ekonomide bir ürünün piyasa fiyatı belirlenirken arz ve talep fonksiyonlarından yararlanılır. Fonksiyonların kesim noktası, denge noktası olarak ifade edilir.

Polar kumaş üretimi yapmak isteyen bir fabrika, kumaşın üretim miktarını ve fiyatını belirlemek istemektedir. Kumaş fiyatına (TL) bağlı üretim miktarını (ton) ifade eden arz ve talep, sırasıyla uygun aralıkta $f(x) = \frac{x}{2} - 3$ ve $g(x) = 21 - x$ şeklinde tanımlı f ve g doğrusal fonksiyonları ile modellenmiştir. Aşağıda f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) **Kumaş üretimi için arz ve talebin dengede olduğu durumda kaç ton kumaş üretilmesi gerektiğini ve üretilen kumaş fiyatının kaç Türk lirası olması gerektiğini bulunuz.**

b) **Arzı modelleyen f fonksiyonunun grafiği y ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim ötelendiğinde elde edilecek yeni denge noktasına göre kumaşın üretim miktarındaki ve 1 ton kumaşın fiyatındaki değişimi bulunuz.**

12. Araç kiralamak isteyen Hatice Hanım, iki şirketle iletişime geçmiştir. 1. şirket 2000 Türk lirası sabit ücret ve kilometre başına 3 Türk lirası, 2. şirket 1500 Türk lirası sabit ücret ve kilometre başına 5 Türk lirası almaktadır.

a) **x kilometre kullanılan bir aracın toplam kiralama maliyetini (TL) 1 ve 2. şirket için ifade eden maliyet fonksiyonlarını yazınız.**

b) **1 ve 2. şirket için toplam kiralama maliyetini ifade eden maliyet fonksiyonlarının grafiklerini dik koordinat sisteminde çiziniz.**

c) **Kaç kilometrelik kullanımda 1 ve 2. şirketin aldıkları araç kiralama ücretlerinin eşit olduğunu cebirsel olarak hesaplayıp grafik üzerinde gösteriniz.**

ç) **En az kaç kilometrelik kullanımda 1. şirketin araç kiralama maliyetinin 2. şirketin araç kiralama maliyetinden daha ekonomik olduğunu bulunuz.**

13. Orhan Bey, yaz tatilinde bir tatil köyünde konaklamayı planlamıştır. Tatil köyünde bir gecelik kişi başı ücret 8000 Türk lirası ve yolculuğun sabit gideri 2000 Türk lirasıdır. Orhan Bey, bu tatil için 35 000 Türk liralık bütçe belirlemiştir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) **Orhan Bey'in bütçesini aşmayacak şekilde oluşturacağı tatil planını ifade eden eşitsizliği tatil köyünde kalacağı gece sayısına bağlı olarak oluşturunuz.**

b) **Bütçesini aşmadan tatil köyünde Orhan Bey'in en fazla kaç gece konaklayabileceğini bulunuz.**

14. Bir kırtasiye, fotokopi makinesi kiralayacaktır. 2 tane fotokopi makinesi, istediği ölçütlere uygundur. Bu makinelerin çalışma süresine (dk.) bağlı olarak elektrik maliyeti ve sabit depozito bedeli (TL) bilgileri Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1

Fotokopi Makinesinin Markası	Sabit Kiralama Depozito Bedeli (TL)	Çalışma Süresine (dk.) Bağlı Olarak Elektrik Maliyeti (TL)
A	5000	0,25
B	4000	0,65

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) A ve B makinelerinin çalışma süresine (dk.) bağlı toplam maliyetlerini (TL) ifade eden fonksiyonları yazınız.

b) Elde ettiğiniz fonksiyonlardan yararlanarak Tablo 2'de verilen çalışma sürelerine göre A ve B fotokopi makinelerinin toplam maliyetlerini bularak Tablo 2'yi uygun şekilde doldurunuz.

Tablo 2

Çalışma Süresi (dk.)	1000	1500	2000	2500	3000
A Makinesinin Toplam Maliyeti (TL)					
B Makinesinin Toplam Maliyeti (TL)					

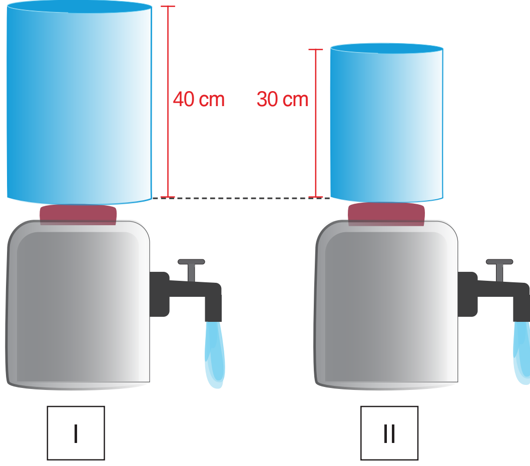
c) A ve B makinelerine ait toplam maliyet fonksiyonlarının grafiklerini dik koordinat sisteminde çiziniz.

ç) A ve B makinelerinin toplam maliyetlerinin kaç dakikalık çalışma süresi sonunda ve kaç Türk lirasında eşitleneceğini grafik gösteriminden yararlanarak bulunuz.

d) A ve B makinelerinin toplam maliyetlerinin kaç dakikalık çalışma süresi sonunda eşitleneceğini cebirsel çözüm yaparak bulunuz.

e) A ve B makinelerine ait 1000, 1500, 2000, 2500 ve 3000 dakikalık çalışma süresi sonundaki toplam maliyetleri karşılaştırarak hangi makinenin daha ekonomik olduğunu belirleyiniz.

15. Aşağıdaki görselde su sebilleri üzerinde duran dik dairesel silindir kaplar verilmiştir.



I ve II numaralı silindir şeklindeki kaplar su ile dolu iken sabit hızda su akıtan musluklar açılmıştır. I ve II numaralı kapların içindeki su yüksekliğinin (cm) zamana (dk.) bağlı değişimi sırasıyla Tablo 1 ve Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 1

Kaptaki Suyun Yüksekliği (cm)	Musluğun Açık Kaldığı Süre (dk.)
40	0
36	1
32	2
28	3
24	4

Tablo 2

Kaptaki Suyun Yüksekliği (cm)	Musluğun Açık Kaldığı Süre (dk.)
30	0
28	1
26	2
24	3
22	4

Tablo 1 ve Tablo 2'de verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) **I ve II numaralı kaplara ait zamana (dk.) bağlı su yüksekliğini ifade eden fonksiyonun cebirsel temsilini yazınız.**

b) **Cebirsel temsilini yazdığınız fonksiyonların grafiklerini $f(x) = x$ şeklinde tanımlı f doğrusal referans fonksiyonunun grafiğine uygun dönüşümleri yaparak çiziniz.**

c) **Hangi kaptaki suyun daha çabuk tükeneceğini kaplara ait fonksiyonların grafiklerinden yararlanarak bulunuz.**

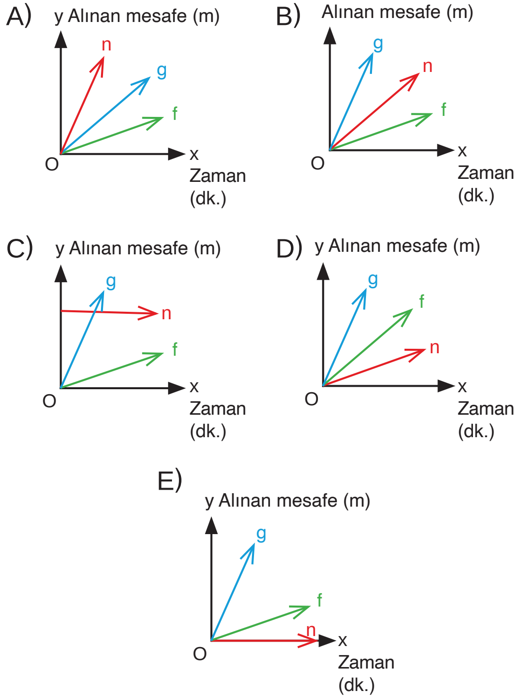
ç) **Kaplardaki suların yüksekliklerinin kaçıncı dakikada eşit olduğunu bulunuz.**

16-19. çoktan seçmeli soruları cevaplayınız.

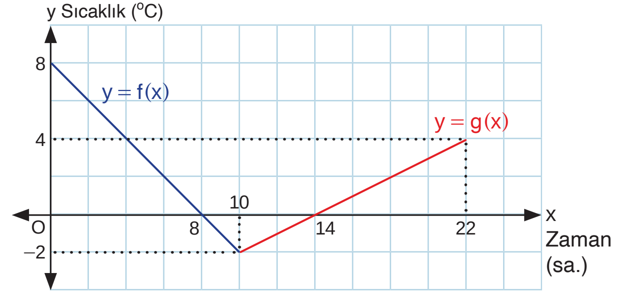
16. Bir kayak merkezinde kayakçıların kullanması için yürüyen bant yer almaktadır. Üç kayakçı, yürüyen bandın başladığı yerden yola çıkmıştır. 1. kayakçı, bandın yanındaki zeminde sabit hızla yürümektedir. 2. kayakçı; 1. kayakçı ile aynı sabit hızla ve bandın ilerleme yönünde, bant üzerinde yürümektedir. 3. kayakçı, yürüyen bant üzerinde durarak pistin diğer ucuna gitmektedir. Yürüyen bandın hızı, zeminde sabit hızla yürüyen kayakçının hızının 2 katıdır.

1. kayakçıya ait grafik f, 2. kayakçıya ait grafik g ve 3. kayakçıya ait grafik n fonksiyonu ile gösterilmiştir.

Buna göre zamana (dk.) bağlı olarak bandın başlangıcından pistin diğer ucuna kadar bu kayakçıların aldıkları mesafeyi (m) gösteren fonksiyonların grafik temsilleri aşağıdakilerden hangisi olabilir?



17. İç mekânları belirli sıcaklık, nem ve hava kalitesi seviyelerine getirme işlemine iklimlendirme denir. İklimlendirilen bir odada yapılan hava sıcaklığı ölçümlerinde zamana (sa.) bağlı sıcaklık (°C) değerlerindeki değişimi gösteren, uygun aralıkta tanımlı f ve g fonksiyonlarının grafikleri aşağıda verilmiştir.



Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Hava sıcaklığı, 7 saat boyunca 0 °C'un altındadır.

B) Hava sıcaklığı, 18 saat boyunca 0 °C'un üzerindedir.

C) Hava sıcaklığı, 8 saat boyunca azalmıştır.

D) Hava sıcaklığı, 12 saat boyunca artmıştır.

E) Yapılan ilk ölçüm ile son ölçüm arasındaki sıcaklık farkı 10 °C'tur.

18. Görselde verilen haritada doğrusal bir yol üzerinde gerçek sayı doğrusu modellenmiştir. Sayı doğrusu üzerinde Can'ın evinin konumu O noktasıyla, kütüphane ve marketin konumları sırasıyla $K(-5)$ ve $M(3)$ noktalarıyla gösterilmiştir.



Sayı doğrusunda 1 birimlik uzaklık, 100 metreye karşılık gelmektedir. Can'ın kütüphane ve market arasındaki yol üzerinde herhangi bir konumu x, konumuna bağlı bulunduğu noktanın evine olan mesafesini (m) ifade eden fonksiyon f dir.

$a, b, c, d, k, n \in \mathbb{R}$ **olmak üzere f fonksiyonu** $f: (a, b) \longrightarrow [c, d), \ f(x) = |kx + n|$ **şeklinde tanımlı olduğuna göre** $a + b - c - n + \frac{d}{k}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) −8 B) −2 C) 0 D) 3 E) 13

19. Fadime Hanım, evden ofisine doğru sabit hızla yürümeye başlamıştır. Fadime Hanım'ın telefonunu evde unuttuğunu fark eden kızı Derya da bir süre sonra evden çıkmış ve sabit hızla annesi ile aynı yoldan ilerlemeye başlayarak annesi ofise varmadan ona yetişmiştir. Aynı noktadan harekete başlayan Fadime Hanım ve Derya'nın zamana (dk.) bağlı aldıkları mesafeyi (m) gösteren fonksiyonlar sırasıyla f ve d fonksiyonları olsun. Uygun aralıkta tanımlı f ve d fonksiyonlarının cebirsel temsilleri $f(t) = 70t$ ve $d(t) = 90t - 360$ biçimindedir.

Buna göre

I. Derya, Fadime Hanım'dan 4 dakika sonra yola çıkmıştır.

II. Derya, Fadime Hanım'a evden 1260 m uzakta yetişir.

III. Fadime Hanım evden çıktıktan 12 dk. sonra Derya ona yetişmiştir.

ifadelerinden hangisi veya hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II

D) I ve III E) II ve III

Tema ile ilgili daha fazla soru çözmek için karekodu okutunuz.



Zenginleştirme bölümüne ulaşmak için karekodu okutunuz.



3\.
TEMA

Geometrik Şekiller

3.1. Üçgende Açı ve Kenarlarla İlgili Özellikler

▶ **Anahtar Kavramlar**

- açı
- dış açı
- iç açı
- kenar
- üçgen
- üçgen eşitsizliği

▶ **Sembol ve Gösterimler**

- $m(\widehat{BAC})$
- $[AB]$
- $|AB|$
- $\perp$
- $//$
- $\widehat{ABC}$

▶ **Bu temada sizden**

- üçgende açı ve kenarlarla ilgili özellikleri, üçgenin açı ve kenarları arasındaki ilişkileri doğrulayabilmeniz veya ispatlayabilmeniz

beklenmektedir.

Tema boyunca sizden çalışma kâğıtlarındaki soruları çözmeniz, performans görevlerini yerine getirmeniz, ölçme ve değerlendirme sorularını çözmeniz beklenmektedir.


Tema karekodu


Tema sunusuna ulaşmak için karekodu okutunuz.

Başlarken 

Mimarlar ve mühendisler, yapıların dayanıklılığını ve kararlılığını artırmak için genellikle üçgen şeklini tercih ederler. Üçgenin özel yapısal özelliklere sahip olması bu tercihin temel nedenlerinden biridir. Üçgen, kenarlarından birinin uzunluğu değiştirilmeden veya eklemlerinden biri kırılmadan deforme olmayan bir geometrik şekildir. Bu nedenle özellikle dikdörtgen yapıları güçlendirmenin etkili yollarından biri, dikdörtgenin köşegen uzunluğu boyunca üçgenler oluşturarak dikdörtgene destekler eklemektir. Bu çapraz destekler, yapıya dayanıklılık ve direnç katmanın yanı sıra yapının kararlı hâle gelmesini sağlar. İki çapraz köşe arasındaki tek bir destek, bir dikdörtgeni iki üçgene dönüştürerek yapıya uygulanan yanal hareketi engeller; deprem veya diğer dış kuvvetlere karşı direnci artırır ve yapıyı güçlendirir. Bu özelliklerinden ötürü üçgenlerden köprülerin ve bina çatılarının yapımında; mobilya, iç mekân tasarımı gibi alanlarda yararlanılır.



Ön Değerlendirme

1. Aşağıdaki tabloda harfler ile verilen geometrik şekilleri numaralandırılmış kavramlarla eşleştirerek doğru harfi kavramın altındaki boşluğa yazınız.

a) A, B, C	**b)** A, B	**c)** A, B, C	**ç)** A, B	**d)** A, B
e) A, B, C	**f)** A, B, C	**g)** C, A, B	**ğ)** C, A, B	**h)** C, A, B

1. Dar açı	2. Geniş açı	3. Dik açı	4. Doğru açı ....
5. Tam açı	6. İkizkenar üçgen	7. Eşkenar üçgen	8. Dik üçgen ....

2. Aşağıda verilen işlem basamaklarını takip ederek boş bırakılan alana uygun çizimi yapınız.

I. $d_1 \parallel d_2$ olacak şekilde iki doğru çiziniz.

II. Bu doğrulara dik olacak şekilde d_3 doğrusunu çiziniz.

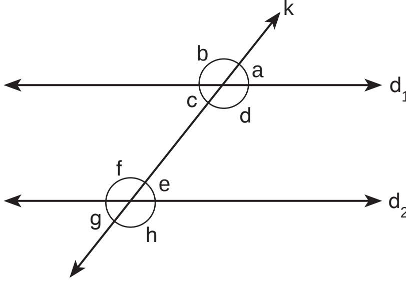
III. $d_1 \cap d_3 = \{A\}$ ve $d_2 \cap d_3 = \{B\}$ olacak şekilde A ve B noktalarını doğrular üzerine yerleştiriniz.

3. Aşağıda verilen soruları cevaplayınız.

I. Düzlemde bir d doğrusuna bu doğru üzerinde olmayan bir A noktasından kaç farklı paralel doğru çizilebilir?

II. Bir d doğrusu verilmiş olsun. Bu doğru üzerinde olmayan bir A noktasından bu doğruya paralel olmayan iki farklı doğru çizildiğinde oluşan şekil hakkında ne söylenebilir? Fikirlerinizi arkadaşlarınızla tartışınız.

4.

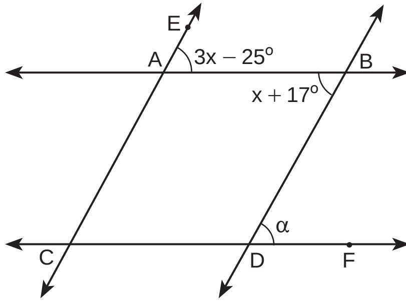


Yandaki şekilde $d_1 \parallel d_2$ olmak üzere d_1, d_2, k doğruları ve bu doğruların oluşturduğu açılar verilmiştir.

Şekildeki açılar için "ters", "iç ters", "dış ters", "yöndeş", "karşı durumlu" ifadelerinden uygun olanları kullanarak tablodaki boş alanları doldurunuz.

a ile c açıları .... açılardır.	d ile f açıları .... açılardır.	a ile e açıları .... açılardır.
b ile d açıları .... açılardır.	c ile e açıları .... açılardır.	b ile f açıları .... açılardır.
e ile g açıları .... açılardır.	b ile h açıları .... açılardır.	c ile g açıları .... açılardır.
f ile h açıları .... açılardır.	a ile g açıları .... açılardır.	c ile f açıları .... açılardır.

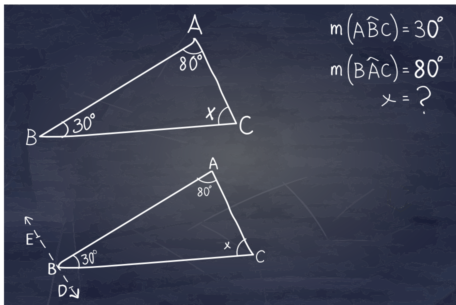
5.



Yandaki şekilde $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$, $m(\widehat{EAB}) = 3x - 25^o$ ve $m(\widehat{ABD}) = x + 17^o$ dir.

Buna göre $m(\widehat{BDF}) = \alpha$ **değerini bulunuz.**

6.



Matematik dersinde öğretmen tahtaya yandaki soruyu çizmiş ve Beren'den soruyu çözmesini istemiştir. Beren, üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının kaç derece olduğunu unuttuğunu söylemiştir. Öğretmen, Beren'e iki paralelin bir kesenle oluşturduğu açılardan faydalanarak soruyu çözebileceği bilgisini vermiştir.

Bunun üzerine Beren görselde gösterildiği gibi AC kenarına paralel ve B noktasından geçen ED doğrusunu çizerek soruyu çözmüştür.

Beren x ile gösterilen açının ölçüsünü kaç derece bulmuştur?

7. **Bir ABC üçgeni ve bu üçgenin kenarlarına ait yükseklikleri çiziniz. Çizdiğiniz yüksekliklerin kesişim noktasının**

I. ABC üçgeninin iç bölgesinde,

II. ABC üçgeninin kenarlarından biri üzerinde,

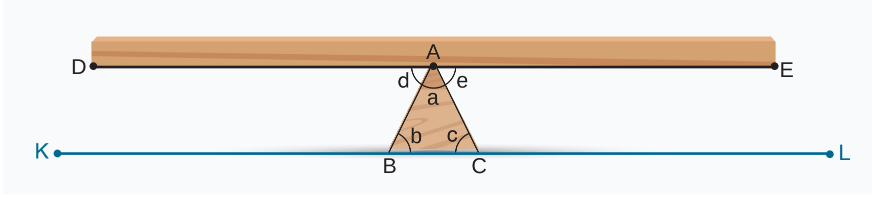
III. ABC üçgeninin dış bölgesinde

olması durumunda ABC üçgeninin açıları bakımından hangi tür üçgen sınıfına gireceğini bulunuz.

3.1. ÜÇGENDE AÇI VE KENARLARLA İLGİLİ ÖZELLİKLER

Konuya Başlarken 

Görselde yandan görünümü üçgen şeklinde olan destek üzerindeki bir tahta parçasının konumunun düzlemsel modellemesi verilmiştir. Desteğin ABC üçgeni, yer düzleminin [KL] ve tahta parçasının [DE] ile ifade edildiği görselde [DE] ⫽ [KL] dır. Tahta parçasının üçgenle yaptığı açıların ölçüleri d ve e, üçgenin iç açılarının ölçüleri a, b ve c olarak gösterilmiştir.



Buna göre aşağıdaki sorularla ilgili fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

1. Hangi açıların ölçülerinin eşit olduğunu gerekçeleriyle belirtiniz.
2. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı ile doğru açı arasındaki ilişkiden hareketle ulaştığınız sonucu açıklayınız.
3. İkinci soruda ulaştığınız sonucun tüm üçgenlere genellenip genellenemeyeceğini açıklayınız.

Bilimsel çalışmalar sonucunda elde edilen bilgilerin doğruluğunu göstermek için çeşitli yollar kullanılır. Matematikte bir varsayımın doğruluğu, mantıksal çıkarımlar yapılarak gösterilebilir. Bir varsayımın doğruluğunun veya yanlışlığının mantıksal çıkarımlar yoluyla gösterilmesi varsayımın ispatlanması anlamına gelir.

Üçgende Açılar

Üçgen, geometrinin temel kavramlarından biridir. Bu nedenle üçgenin açılarına ilişkin önermelerin ispatları geometrinin temel şekillerine dair aksiyomlar ve bu aksiyomlardan elde edilen teoremler kullanılarak yapılmaktadır.

1. Uygulama

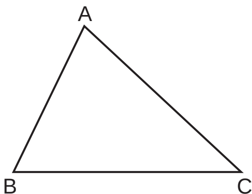


Üçgenin İç Açılarının Ölçüleri Toplamı

Aşağıda verilen teoremin ispatına yönelik adımları uygulayınız.

1. Teoremi inceleyiniz.

Teorem: Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir.



Verilenler: ABC üçgeni

İspatlanacak ifade: $m(\widehat{A})+m(\widehat{B})+m(\widehat{C})=180°$

2. Teoremin iki paralel doğrunun bir kesenle yaptığı açılar kullanılarak nasıl ispatlanabileceğine ilişkin fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

3. İkinci adımda karar verdiğiniz ispat yöntemine uygun olarak gerekli çizimleri yapınız ve çiziminizle ilgili açıklamaları yazınız.

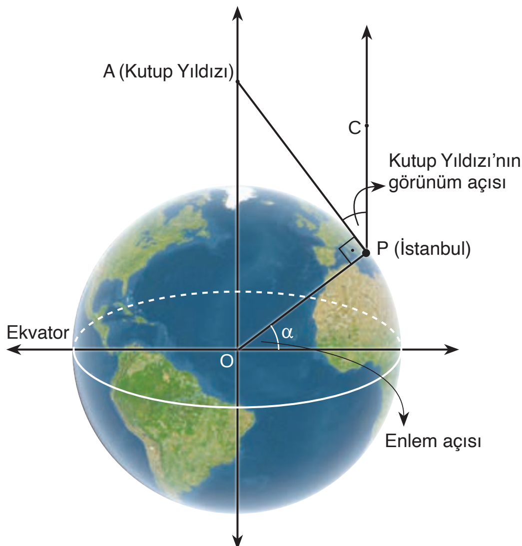
4. Yaptığınız çizim sonucunda oluşan açılar ile bu açıların ölçüleri arasındaki ilişkiyi açıklayınız ve matematiksel olarak ifade ediniz.

5. Yaptığınız çizim sonucunda oluşan açılar ile üçgenin iç açıları arasındaki ilişkiyi açıklayınız ve matematiksel olarak ifade ediniz.

6. Dördüncü ve beşinci adımda elde ettiğiniz ilişkileri kullanarak üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamına ilişkin ulaştığınız sonucu yazınız.

7. Teoremin ispatının tamamlanıp tamamlanmadığına ilişkin fikrinizi ispat sürecinde takip ettiğiniz adımlardan hareketle gerekçelendirerek açıklayınız. Ulaştığınız sonuçları arkadaşlarınızla tartışınız.

1. ÖRNEK

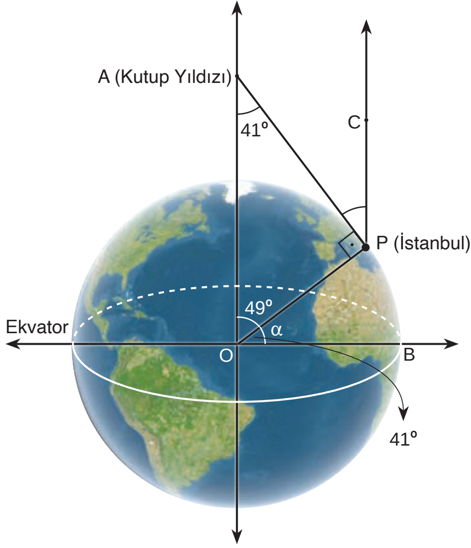


Dünya üzerindeki bir yerin Ekvator'a uzaklığının derece, dakika ve saniye cinsinden açısal değeri enlemdir. Kuzey yarım kürede Kutup Yıldızı'nın görünüm açısının ölçüsü, bulunulan enlem derecesini verir.

Yandaki şekilde $[OA \parallel [PC$ ve Kutup Yıldızı'nın İstanbul'dan görünüm açısı 41° dir.

Buna göre İstanbul'un yer aldığı kuzey enleminin alfa açı değerini bulunuz.

Çözüm



$[OA \parallel [PC$ olduğundan $m(\widehat{OAP}) = m(\widehat{APC}) = 41^\circ$ olur.

AOP dik üçgeninde $m(\widehat{A}) + m(\widehat{O}) + m(\widehat{P}) = 180^\circ$ olduğuna göre $41^\circ + 90^\circ + m(\widehat{O}) = 180^\circ$ ve $m(\widehat{O}) = 49^\circ$ olur.

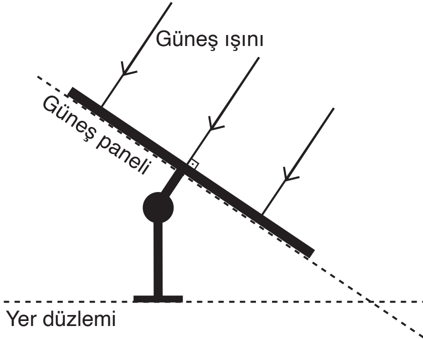
$[OA \perp [OB$ olduğundan $\alpha + 49^\circ = 90^\circ$ ve $\alpha = 41^\circ$ olur.

Buna göre İstanbul'da hem Kutup Yıldızı'nın görünüm açısının hem de enlem açısının ölçüsünün 41° olduğu bulunur.

1. Sıra Sizde

Aşağıdaki soruları cevaplayınız. Çözümlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

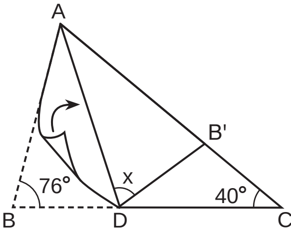
1.



Güneş panellerinin güneşten azami verim alabilmesi için güneş ışınlarının panele dik açıyla gelmesi gerekir. Görseldeki güneş paneli, yer düzlemi ile yaptığı açıyı güneş ışınlarının geliş açısına göre ayarlayabilecek şekilde tasarlanmıştır.

Panelin bulunduğu bölgede güneş ışınlarının yer düzlemine 42° lik açı ile gelmesi durumunda panelin yer düzlemi ile yaptığı açının ölçüsünün kaç derece olacağını bulunuz.

2.



Yanda verilen ABC üçgeni şeklindeki kâğıt, AB kenarı AC kenarı ile çakışacak şekilde katlandığında B noktası B' noktasına gelmektedir.

$m(\widehat{ABC}) = 76^\circ$, $m(\widehat{ACB}) = 40^\circ$ **ve** $m(\widehat{ADB'}) = x$ **olduğuna göre x değerini bulunuz.**

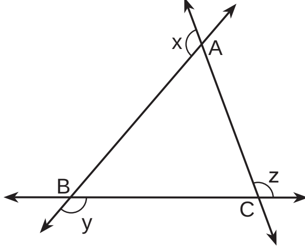
2. Uygulama



Üçgenin Dış Açılarının Ölçüleri Toplamı

Aşağıda verilen teoremin ispatına yönelik adımları uygulayınız.

1. Teoremi inceleyiniz.



Teorem: Üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.

Verilenler: ABC üçgeni, ABC üçgeninin dış açılarının ölçüleri x, y, z

İspatlanacak ifade: $x + y + z = 360^{\circ}$

2. Teoremin ispatının üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı kullanılarak nasıl yapılabileceğine ilişkin fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız.

3. Teoremin ispat adımlarının yer aldığı tabloda boş bırakılan alanları aşağıdaki soruları cevaplayarak doldurunuz.

a) Üçgenin aynı köşesine ait iç açı ve dış açılar arasındaki ilişkiyi açıklayınız. Bu ilişkiye dayanarak tablonun I. adımının gerekçe kısmını doldurunuz. Gerekçenizden hareketle I. adımın ifadeler kısmında üçgenin her bir iç açısının ölçüsünü o açıya komşu olan dış açının ölçüsü türünden matematiksel olarak ifade ediniz.

b) İspatın II. adımında verilen gerekçeden hareketle bu adımda yer alması gereken matematiksel ifadeye ilişkin fikirlerinizi açıklayarak II. adımın ifadeler bölümünü doldurunuz.

c) Tablonun II. adımında yer alan matematiksel ifadeyi üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamını ifade edecek şekilde düzenleyerek III. adımın ifadeler bölümünü doldurunuz.

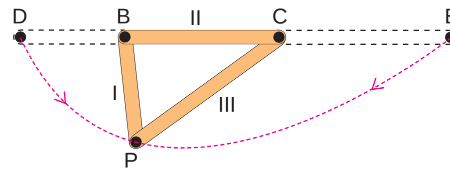
Adım	İfadeler	Gerekçe
I.	ABC üçgeninin iç açılarının ölçüleri $m(\widehat{A}) =$ .... $m(\widehat{B}) =$ .... $m(\widehat{C}) =$ .... bulunur.	
II.		Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir.
III.		II. adımda elde edilen eşitlik

2. ÖRNEK

Bir usta iş aletlerini asmak için üç parça çubuğu duvara D, B, C ve E noktalarından vidalamıştır. Zaman içinde D ve E noktalarındaki vidalar yerlerinden çıkmıştır. I ve III numaralı çubuklar sırasıyla B ve C noktaları etrafında döndüğünden D ve E noktaları Şekil 2'de pembe çizgiyle gösterilen yolları izleyerek P noktasında çakışmıştır.



Şekil 1



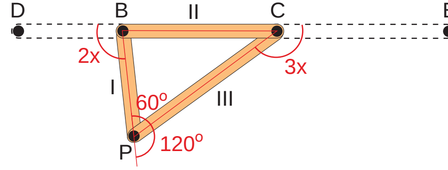
Şekil 2

Çubukların son konumunda $2 \cdot m(\widehat{PCE}) = 3 \cdot m(\widehat{PBD})$ ve $m(\widehat{BPC}) = 60^{\circ}$ olduğuna göre I numaralı çubuk ok yönünde kaç derece dönmüştür?

Çözüm

E ve D noktaları birleştirilirse PBC üçgeni elde edilir. $2 \cdot m(\widehat{PCE}) = 3 \cdot m(\widehat{PBD})$ eşitliğinden $m(\widehat{PCE}) = 3x$ ve $m(\widehat{PBD}) = 2x$ elde edilir. Üçgenin P köşeşine ait dış açısının ölçüsü ise $180^o - 60^o = 120^o$ olur. Üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360^o olduğundan

$$3x + 2x + 120^o = 360^o$$
$$5x + 120^o = 360^o$$
$$5x = 240^o$$
$$x = 48^o \text{ elde edilir.}$$



$m(\widehat{PBD}) = 2x$ olduğundan
$= 2 \cdot 48^o$
$= 96^o$ bulunur.

Konu ile ilgili çalışma kâğıdına ulaşmak için karekodu okutunuz.



3. Uygulama

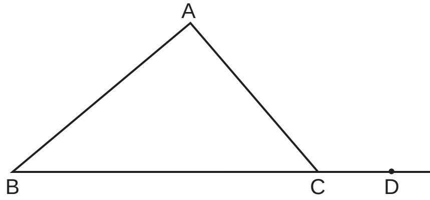


Üçgenin İç ve Dış Açılarının Ölçüleri Arasındaki İlişki

Aşağıda verilen teoremin ispatına yönelik adımları uygulayınız.

1. Teoremi inceleyiniz.

Teorem: Bir üçgende bir dış açının ölçüsü, kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.



Verilenler: ABC üçgeni, ACD dış açısı

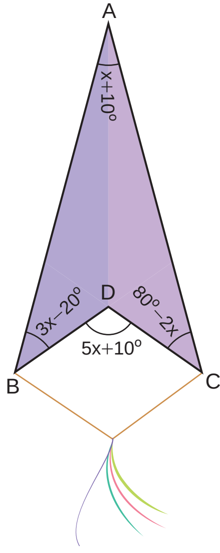
İspatlanacak ifade: $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BAC})$

2. Teoremin doğrulamasının veya ispatının nasıl yapılabileceğine ilişkin fikirlerinizi sınıf arkadaşlarınızla paylaşarak tartışınız.

3. Teoremin ispatına yönelik verilen aşağıdaki tablonun boş alanlarına uygun ifade ve gerekçeleri yazarak ispatı tamamlayınız.

Adım	İfadeler	Gerekçe
I.		ABC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı
II.	$m(\widehat{ACD}) + m(\widehat{ACB}) = 180^o$	
III.	$m(\widehat{ACD}) + m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB})$	
IV.		Sadeleştirme

3. ÖRNEK

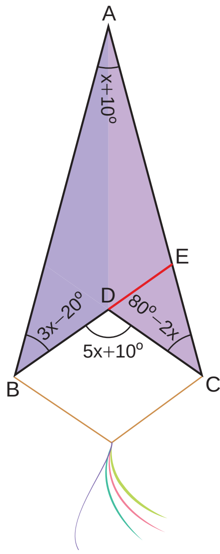


21 Mart Down Sendromu Farkındalık Günü'nde gerçekleştirilecek uçurtma şenliği için görseldeki uçurtmayı tasarlayan Mahmut, uçurtmanın köşelerindeki açı ölçülerini aşağıdaki gibi belirliyor.

$m(\widehat{BAC}) = x + 10^\circ$
$m(\widehat{ABD}) = 3x - 20^\circ$
$m(\widehat{BDC}) = 5x + 10^\circ$
$m(\widehat{DCA}) = 80^\circ - 2x$

Buna göre BDC açısının ölçüsünü bulunuz.

Çözüm

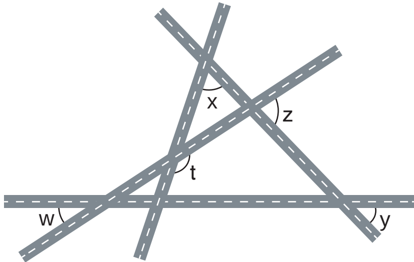


Şekildeki $[BD]$, D noktasından $[AC]$na kadar uzatılsın. Uzatılan doğru parçası $[AC]$ ile E noktası üzerinde kesişsin.

$m(\widehat{DEC}) = m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ABD})$
$m(\widehat{DEC}) = x + 10^\circ + 3x - 20^\circ$
$m(\widehat{DEC}) = 4x - 10^\circ$ elde edilir.

$m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{DEC}) + m(\widehat{DCA})$
$5x + 10^\circ = 4x - 10^\circ + 80^\circ - 2x$
$5x + 10^\circ = 2x + 70^\circ$
$3x = 60^\circ$
$x = 20^\circ$ elde edilir. Buradan
$m(\widehat{BDC}) = 5x + 10^\circ$
$5 \cdot 20^\circ + 10^\circ = 110^\circ$ bulunur.

2. Sıra Sizde



Yandaki şekilde kenarları birbirine paralel olan doğrusal yollar ve bu yolların kesişmesiyle oluşan açı ölçüleri x, y, z, t, w olarak verilmiştir.

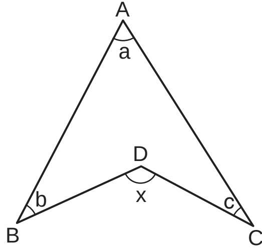
Buna göre tabloda verilen ifadelerden doğru olanın karşısına "D", yanlış olanın karşısına "Y" yazınız.

İfadeler	D/Y
$y + w = z$	
$x + y + w = t$	
$x + z = w + y$	

3. Sıra Sizde

Aşağıdaki önermeyi inceleyiniz. Önermenin ispat adımlarının yer aldığı tablonun boş kısımlarına uygun ifade ve gerekçeleri yazarak ispatı tamamlayınız.

Önerme



Şekildeki ABDC dörtgeninde $m(\widehat{BDC}) = x$, $m(\widehat{BAC}) = a$, $m(\widehat{ABD}) = b$ ve $m(\widehat{ACD}) = c$ ise $x = a + b + c$ olur.

Adım	İfadeler	Gerekçe
I.	$BD \cap [AC] = \{E\}$ olmak üzere B ve D noktalarından geçen doğru çizilsin.	İki üçgen oluşturma
II.		ABE üçgeninde BEC dış açısının ölçüsü, kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.
III.	$m(\widehat{BDC}) = x = a + b + c$	

Kontrol Noktası 

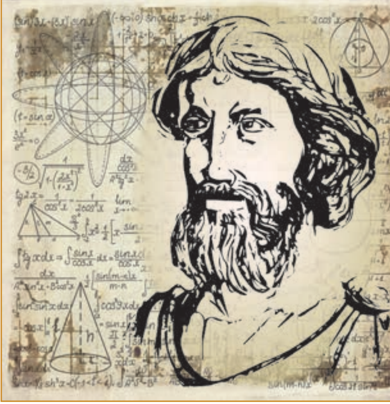
- Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğuna ilişkin teorem, paralel iki doğrunun bir kesenle yaptığı açılar kullanılarak ispatlanabilir.
- Üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamının 360° olduğuna ilişkin teorem, üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamından yararlanılarak ispatlanabilir.
- “Üçgende bir dış açının ölçüsü, kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.” teoremi, paralel iki doğrunun bir kesenle yaptığı açılar kullanılarak veya üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamından yararlanılarak ispatlanabilir.

Konu ile ilgili animasyona ulaşmak için karekodu okutunuz.

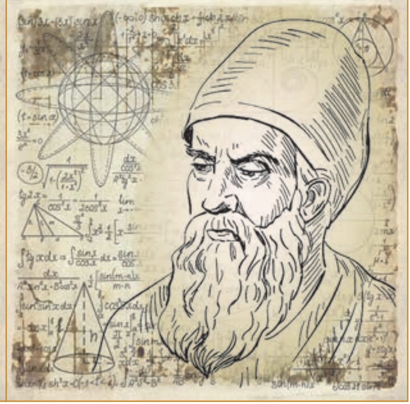


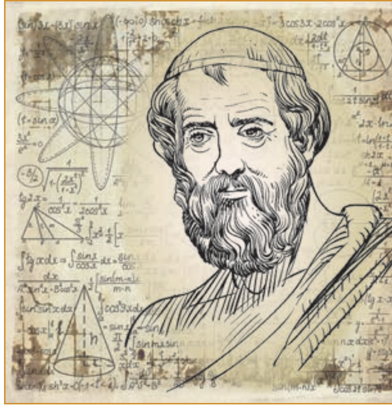
Matematik Tarihinden Notlar

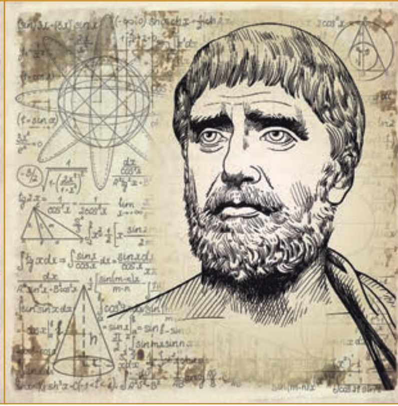
Geometriye Katkıda Bulunan Bilim İnsanları


Pisagor (Temsilî)


Sabit bin Kurra (Temsilî)


Öklid (Temsilî)


Platon (Temsilî)


Tales (Temsilî)

Geometri, matematik öğretim programlarında genellikle muhakeme yeteneklerinizi geliştirebileceğiniz ve matematiğin aksiyomatik yapısını keşfedebileceğiniz bir alan olarak önemli yer tutar. Geometri alanı size tanımlar ve aksiyomlar kullanarak muhakeme etme, gerekçelendirme ve ispat becerilerinizi geliştirme fırsatı sunar.

Geometrinin tarihçesi Babillilere kadar uzanmaktadır. Özellikle arazi ölçümleriyle ilgilenen Babillilerde geometri alanına ilişkin en eski kayıtlar, belirli dörtgenlerin ölçümüne odaklanmaktadır. Benzer şekilde eski Mısır'da da topraklar, eşit büyüklükte kare parsellere bölünerek halk arasında paylaştırılmış ve halktan paylarına düşen toprak miktarı kadar vergi alınmıştır. Görüldüğü üzere Babilliler ve Mısırlılar, belirli durumları çözmek için belli kurallar aramış; detaylı doğrulama yapma ihtiyacı duymamış ve mükemmel doğruluğa odaklanmamışlardır. Matematiği hem pratikte uygulanabilir bir alan hem de özel bir bilgi alanı olarak görmüşlerdir.

Yunan filozofları Babilliler ve Mısırlılardan farklı olarak matematikle herhangi bir pratik uygulama mantığıyla değil pratikteki uygulamaların mutlak gerçekle olan ilişkisi yönüyle ilgilenmişlerdir. Bu filozofların en önemlilerinden biri olan Miletli Tales, Yunan geometrisinin öncüsü kabul edilir. Tales, geometrinin basitleştirilmesine ve daha anlaşılır hâle getirilmesine büyük katkı sağlamıştır.

Yunan geometrisinde soyut düşüncenin gelişimi "Pisagor Okulu"nun kurulmasıyla hız kazanmıştır. Pisagor'un öğrencileri kendilerine Pisagorcular adını vermiştir. Platon, matematiği Pisagorculardan öğrenmiştir. Matematiğin sistematik bir dil olduğuna ve doğru düşünme için hayati önem arz ettiğine inanan Platon, matematik akademisini kurmuştur. Platon'un akademisinde yetişen ilk önemli matematikçi Öklid'dir. Öklid, çok sayıda eser kaleme almıştır ancak bu eserlerin en önemlisi *Elemanlar* adlı kitap serisidir. On üç ciltten oluşan *Elemanlar*, yüzyıllar boyunca geometrinin temel kaynaklarından biri olarak kabul edilmiştir. Kitabın İslam dünyasında yapılan çevirileri büyük ilgi görmüştür.

Döneminin önde gelen matematikçilerinden biri olan Sabit bin Kurra (836-901), Arapların Öklid'i olarak anılmış ve Öklid'in paralel postulatı üzerine yapılan tartışmalara katılmıştır. Sabit bin Kurra'nın bu konudaki çalışmalarının izleri genellikle 18. yüzyıl matematikçileri Lambert (Lembırt) ve Saccheri'nin (Sakheri) çalışmalarında görülmektedir.

Üçgende Açı ve Kenar İlişkileri

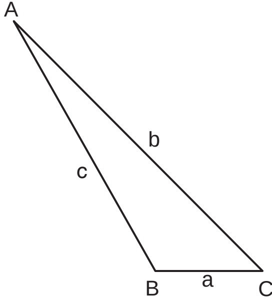
Bir üçgenin açı ölçülerinin sıralaması biliniyorsa kenar uzunluklarının sıralaması da bilinir. Ayrıca üçgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişki, üçgen eşitsizliği olarak ifade edilir. Üçgenin açı ölçüleri ile kenar uzunlukları arasındaki ilişki ve üçgen eşitsizliği, farklı üçgen örnekleri üzerinden ölçümler yapılarak doğrulanabilir.

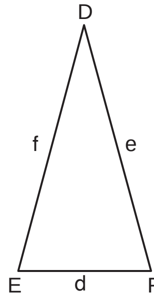
4. Uygulama

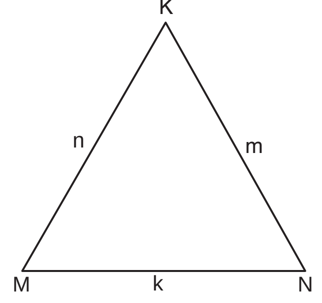


Üçgenin Açı Ölçüleri ve Kenar Uzunlukları Arasındaki İlişki

Aşağıdaki üçgenleri inceleyiniz. Verilen adımları takip ederek soruları cevaplayınız.







1. Her bir üçgenin açıölçer kullanarak açı ölçülerini, cetvel kullanarak kenar uzunluklarını bulunuz ve tabloyu doldurunuz.

ABC Üçgeni		DEF Üçgeni		KMN Üçgeni	
Açı Ölçüleri	Kenar Uzunlukları	Açı Ölçüleri	Kenar Uzunlukları	Açı Ölçüleri	Kenar Uzunlukları
$m(\widehat{A})$ = ...	a = ...	$m(\widehat{D})$ = ...	d = ...	$m(\widehat{K})$ = ...	k = ...
$m(\widehat{B})$ = ...	b = ...	$m(\widehat{E})$ = ...	e = ...	$m(\widehat{M})$ = ...	m = ...
$m(\widehat{C})$ = ...	c = ...	$m(\widehat{F})$ = ...	f = ...	$m(\widehat{N})$ = ...	n = ...

2. Her bir üçgenin iç açı ölçüleri ile bu açıların karşısındaki kenar uzunlukları arasındaki ilişkileri inceleyiniz. Aşağıda verilen genellemelerde boş bırakılan yerleri doldurunuz.

a) Bir üçgende iç açı ölçüsü en büyük olan açının karşısında .... bulunur.

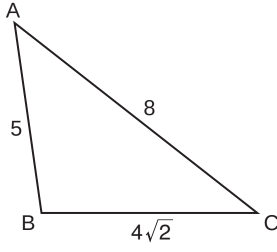
b) Bir üçgende en kısa kenar karşısında .... bulunur.

c) Bir üçgende iç açı ölçüleri eşit açılar karşısında birbirine .... bulunur.

3. Ulaştığınız genellemelerin farklı şekilde nasıl doğrulanabileceğine ilişkin fikirlerinizi arkadaşlarınızla paylaşınız.

4. Elde ettiğiniz önermelerin matematik yazılımı kullanılarak farklı üçgenler üzerinden doğrulanıp doğrulanamadığını test ediniz.

4. ÖRNEK



Yandaki ABC üçgeninde $|AB| = 5$ cm, $|AC| = 8$ cm ve $|BC| = 4\sqrt{2}$ cm olduğuna göre $m(\widehat{A})$, $m(\widehat{B})$ ve $m(\widehat{C})$ değerlerini büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

Çözüm

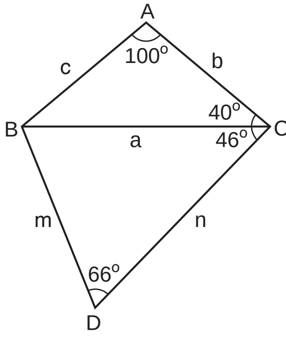
$4\sqrt{2} = \sqrt{32}$ ve $\sqrt{64} > \sqrt{32} > \sqrt{25}$

$8 > \sqrt{32} > 5$ olduğundan $|AC| > |BC| > |AB|$ dur.

Uzun kenar karşısında ölçüsü en büyük olan açı bulunduğundan

$m(\widehat{B}) > m(\widehat{A}) > m(\widehat{C})$ olur.

5. ÖRNEK



Yandaki şekilde verilenlere göre a, b, c ve n kenar uzunluklarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm

ABC üçgeninde iç açıların ölçüleri toplamı $100^\circ + 40^\circ + m(\widehat{ABC}) = 180^\circ$ olduğundan $m(\widehat{ABC}) = 40^\circ$ olur.

$m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB})$ olduğundan $a > b = c$ .... (1) olur.

BDC üçgeninde iç açıların ölçüleri toplamı $66^\circ + 46^\circ + m(\widehat{DBC}) = 180^\circ$ olduğundan $m(\widehat{DBC}) = 68^\circ$ olur.

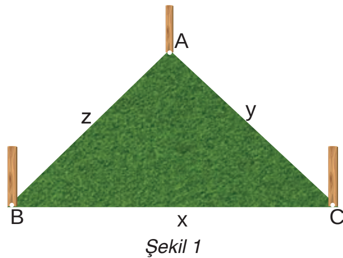
$m(\widehat{DBC}) > m(\widehat{BDC}) > m(\widehat{DCB})$ olduğundan $n > a > m$ .... (2) olur.

(1) ve (2) den $b = c < a < n$ bulunur.

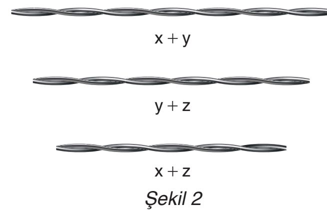
Bir üçgende en uzun kenar karşısında ölçüsü en büyük olan açı, en kısa kenar karşısında ölçüsü en küçük olan açı bulunur. Bu ifadenin tersi de doğrudur.

4. Sıra Sizde

1. Şekil 1'de verilen üçgen biçimindeki tarlanın sınırlarını belirlemek için önce köşelerine birer direk dikilmiş ve direklerin dikildiği noktalar A, B ve C olarak isimlendirilmiştir. Daha sonra bu direkler arasına gergin tel çekilmiştir. Gergin tellerin ikişerli olarak uç uca eklenmesiyle elde edilen toplam uzunlukların uzundan kısaya doğru sıralanışı Şekil 2'de verilmiştir.



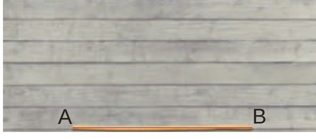
Şekil 1



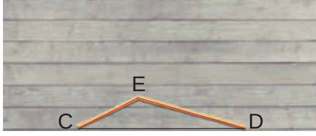
Şekil 2

Buna göre ABC üçgeninin iç açılarının ölçülerini büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

2.



Şekil 1

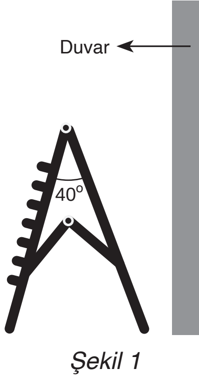


Şekil 2

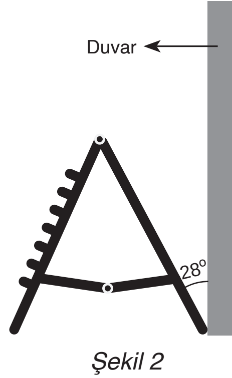
Zeynep Şekil 1'de üstten görünümü verilen mutfak masasının bir kenarına paralel olacak şekilde duran çubuk makarnayı masadan almaya çalışmıştır. Bu esnada çubuk makarna kırılarak iki parçaya ayrılmıştır. Bu parçaların birer uçları Şekil 2'deki gibi masa kenarındaki C ve D noktalarında, diğer uçları da E noktasında birbirine değmektedir. $\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{3}{5}$ ve $|CD| = 16$ birimdir.

Buna göre $|ED|$ nun alabileceği kaç farklı tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

6. ÖRNEK



Şekil 1



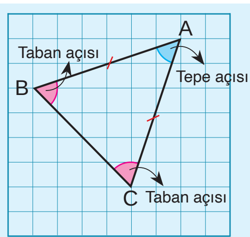
Şekil 2

Ayak uzunlukları eşit bir merdivenin Şekil 1 ve Şekil 2'de verilen iki farklı konumu ile ilgili aşağıdaki soruları cevaplayınız (Merdiven kalınlığı dikkate alınmayacaktır.).

a) Merdiven Şekil 1'deki gibi 40° açılırsa merdivenin ayaklarından birinin yer düzlemi ile yaptığı geniş açının ölçüsünü bulunuz.

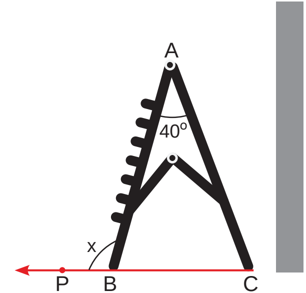
b) Merdiven bir miktar daha açılarak yer düzlemine dik olan duvara Şekil 2'deki gibi dayanıyor. Merdiven ayağının duvar ile yaptığı dar açının ölçüsü 28° olduğuna göre merdivenin kaç derece daha açıldığını bulunuz.

Çözüm

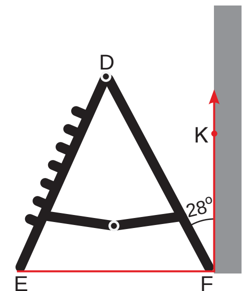


İkizkenar üçgenin taban açılarının ölçüleri birbirine eşittir.

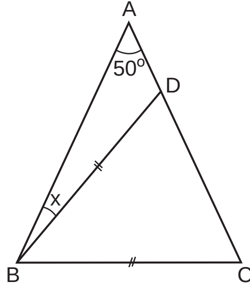
a) $[CP$ çizildiğinde oluşan ABC üçgeninde
$m(\widehat{ABP}) = x$ alınırsa $|AB| = |AC|$ olduğundan
$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 180^\circ - x$ olur.
Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamından
$180^\circ - x + 180^\circ - x + 40^\circ = 180^\circ$ olur.
Buradan $x = 110^\circ$ bulunur.



b) $[EF]$ çizildiğinde $[EF] \perp [FK$ olduğundan $m(\widehat{DFE}) = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$ dir. $|DE| = |DF|$ olduğundan $m(\widehat{DFE}) = m(\widehat{DEF}) = 62^\circ$ dir. Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamından $m(\widehat{EDF}) + 62^\circ + 62^\circ = 180^\circ$ olur. $m(\widehat{EDF}) = 56^\circ$ olduğu için buradan merdivenin $56^\circ - 40^\circ = 16^\circ$ daha açıldığı bulunur.

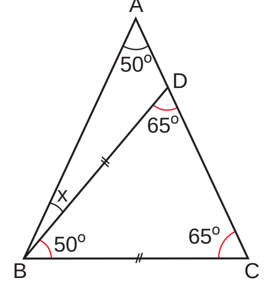


7. ÖRNEK



Yandaki şekilde $|AB| = |AC|$, $|BD| = |BC|$ ve $m(\widehat{BAC}) = 50°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABD}) = x$ değerini bulunuz.

Çözüm



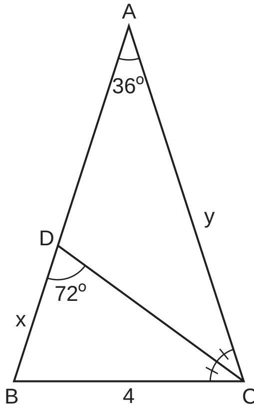
ABC üçgeninde $|AB| = |AC|$ olduğundan $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB})$ dür.

Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB}) + 50° = 180°$ olduğundan $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 65°$ olur.

BDC üçgeninde $|BD| = |BC|$ olduğundan $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{BDC}) = 65°$ dir.

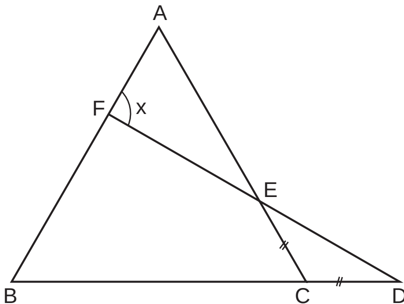
Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $65° + 65° + m(\widehat{DBC}) = 180°$ olduğundan $m(\widehat{DBC}) = 50°$ olur. Buradan $x = 65° - 50° = 15°$ bulunur.

5. Sıra Sizde



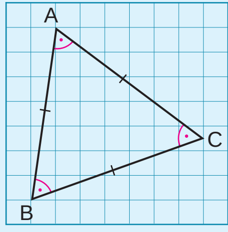
Yandaki şekilde $[CD]$, $\widehat{BCA}$ **nın açıortayı ve** $m(\widehat{BAC}) = 36°$, $m(\widehat{BDC}) = 72°$, $|BD| = x$ birim, $|AC| = y$ birim, $|BC| = 4$ birim **olduğuna göre** $y - x$ **değerini bulunuz.**

8. ÖRNEK



Yandaki şekilde FBD üçgen, ABC eşkenar üçgen, $\{E\} = [FD] \cap [AC]$ ve $|EC| = |CD|$ olduğuna göre $m(\widehat{AFE}) = x$ değerini bulunuz.

Çözüm

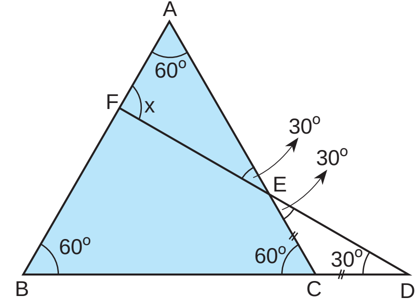


Eşkenar üçgenin iç açılarının ölçüsü birbirine eşit ve 60° dir.

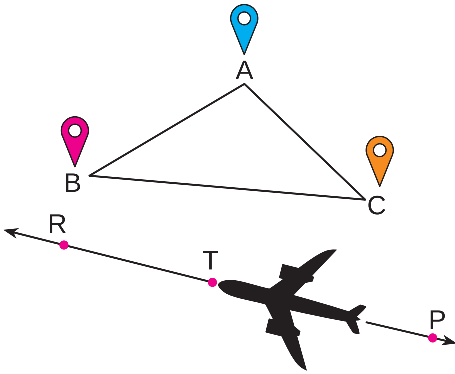
ABC eşkenar üçgeninde
$m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 60°$ dir.

ECD ikizkenar üçgeninde
$m(\widehat{ECD}) = 180° - 60° = 120°$ ve
$m(\widehat{CDE}) = m(\widehat{CED}) = 30°$ olur.

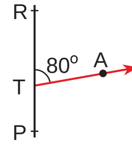
FBD üçgeninde
$x = m(\widehat{FBD}) + m(\widehat{FDB})$
$x = 60° + 30° = 90°$ bulunur.

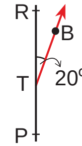


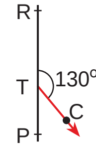
9. ÖRNEK



Şekilde A, B ve C ile gösterilen üç farklı yerleşim yerinin kuş bakışı görünüşü ile bir uçağın uçuş rotası verilmektedir. A, B ve C noktaları bir üçgenin köşelerini belirtmektedir. PR doğrusu ise uçağın uçuş rotasını temsil etmektedir. Uçak rotasında ilerlerken üç yerleşim yerine de eşit uzaklıktaki bir T noktasına geldiğinde pilot, uçağın rotası ile yerleşim yerlerinin konumlarını karşılaştıran ekranda aşağıdaki bilgileri gözlemlemiştir.



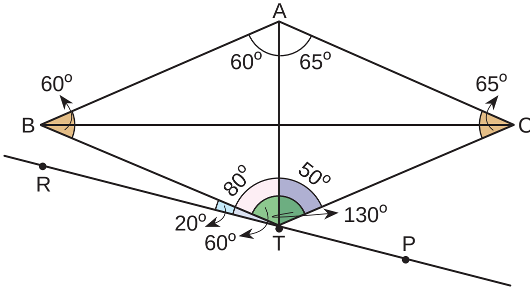




Buna göre AB ve AC doğru parçaları arasındaki açının ölçüsünü hesaplayınız.

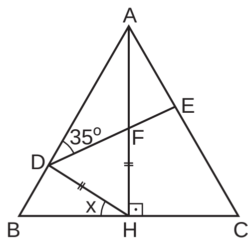
Çözüm

A, B, C noktaları T ile birleştirilirse $|AT| = |BT| = |CT|$ olur.



$m(\widehat{BTR}) = 20°$, $m(\widehat{ATR}) = 80°$ ve $m(\widehat{CTR}) = 130°$ dir.
$m(\widehat{CTA}) = 130° - 80° = 50°$ ve $|AT| = |CT|$ olduğundan $m(\widehat{TAC}) = m(\widehat{TCA}) = 65°$ olur.
$m(\widehat{ATB}) = 80° - 20° = 60°$ ve $|AT| = |BT|$ olduğundan
$m(\widehat{TAB}) = m(\widehat{TBA}) = 60°$ olur.
AB ve AC rotaları arasındaki açının ölçüsü
$m(\widehat{BAC}) = 60° + 65° = 125°$ bulunur.

6. Sıra Sizde



Yandaki şekilde ABC eşkenar üçgen, $|DH| = |FH|$, $[AH] \perp [BC]$, $D \in [AB]$, $E \in [AC]$, $H \in [BC]$ **ve** $m(\widehat{ADE}) = 35°$ **olduğuna göre** $m(\widehat{BHD}) = x$ **değerini bulunuz.**

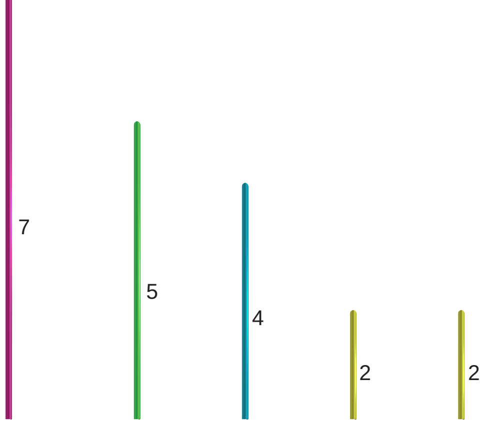
5. Uygulama



Üçgen Eşitsizliği

Aşağıda verilen adımları takip ederek soruları cevaplayınız.

1. Aşağıdaki görselde pembe, yeşil, mavi, sarı renkli çubuklar ve çubukların cm cinsinden uzunlukları verilmiştir. Buna göre verilen soruları cevaplayınız.



a) Yukarıdaki çubukların üç tanesi ile uç noktaları birbirine değecek şekilde birleştirilerek kaç farklı üçgen oluşturulabileceğini bulunuz.

b) Hangi renk çubuklar ile üçgen oluşturulamadığını nedenleri ile birlikte yazınız. Cevaplarınızı arkadaşlarınızın cevapları ile karşılaştırınız.

c) Üçgen oluşturabilmek için kullanılacak çubukların uzunlukları arasında nasıl bir ilişki olması gerektiğine dair fikirlerinizi arkadaşlarınızla paylaşınız ve ulaştığınız sonuçları yazınız.

2. Bir üçgenin çizilebilmesi için kenar uzunlukları arasında nasıl bir ilişki olması gerektiğine dair çıkarımlarınızdan hareketle matematik yazılımı kullanarak farklı üçgenler çiziniz. Çizdiğiniz üçgenlerin kenar uzunluklarını ölçerek çıkarımlarınızı doğrulayınız.

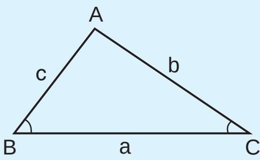
10. ÖRNEK

Aşağıda Büşra, Ahmet ve Ceylin'in evlerinin konumlarıyla ilgili bilgiler verilmiştir.

- Büşra, Ahmet ve Ceylin'in evlerinin konumları doğrusal değildir.
- Büşra'nın evinin Ahmet'in evine uzaklığı 7 km'dir.
- Büşra'nın evinin Ceylin'in evine uzaklığı 11 km'dir.

Buna göre Ahmet ile Ceylin'in evleri arasındaki uzaklığın hangi değerler arasında olabileceğini bulunuz.

Çözüm



ABC üçgeninde a, b, c kenar uzunlukları olmak üzere

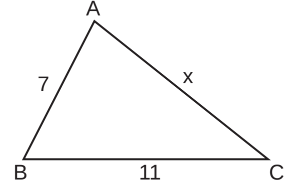
$|b-c| < a < b+c$

$|a-c| < b < a+c$

$|a-b| < c < a+b$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler üçgen eşitsizliği olarak adlandırılır.

Ahmet, Büşra ve Ceylin'in evleri arasındaki mesafeler ABC üçgeni olarak modellenirse $|AB| = 7$ km, $|BC| = 11$ km olur. Ahmet ile Ceylin'in evleri arasındaki en kısa mesafe AC kenarının uzunluğudur. Dolayısıyla $|AB| + |BC| > |AC|$ olmalıdır.



ABC üçgeninde iki kenar uzunluğunun toplamı üçüncü kenardan büyüktür. Bu durum, üç farklı şekilde uygulanabilir.

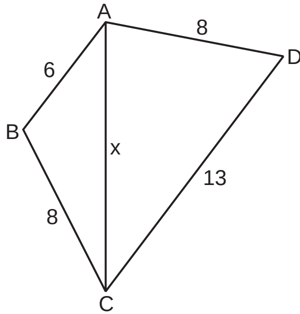
a) $7 + 11 > x$

b) $7 + x > 11$
$x > 11 - 7$

c) $x + 11 > 7$
$x > -4$

a ve b den $11 - 7 < x < 7 + 11$
$4 < x < 18$ olur.

11. ÖRNEK



Yandaki şekilde $|AB| = 6$ cm, $|BC| = |AD| = 8$ cm ve $|CD| = 13$ cm olduğuna göre $|AC|$nun alabileceği değerlerin aralığını bulunuz.

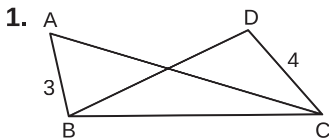
Çözüm

ABC üçgeninde üçgen eşitsizliği nedeniyle $|8-6| < x < 8+6$ olduğundan $2 < x < 14$ olur.

ADC üçgeninde üçgen eşitsizliği nedeniyle $|13-8| < x < 13+8$ olduğundan $5 < x < 21$ elde edilir.

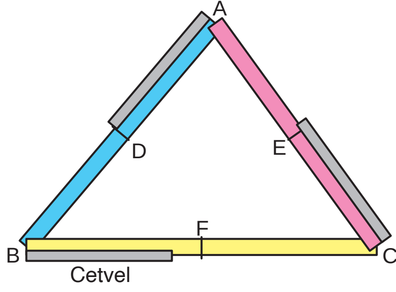
$[AC]$ her iki üçgende üçgen eşitsizliğini sağlayacağından bulunan aralıkların kesişiminden x in değer aralığı $5 < x < 14$ bulunur.

7. Sıra Sizde

1. 

Yandaki şekilde $|AB| = 3$ birim, $|AC| = 10$ birim, $|BD| = 7$ birim ve $|DC| = 4$ birim olduğuna göre $|BC|$nun alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

2.



Bilal, uzunlukları birbirinden farklı olan mavi, pembe ve sarı renkli üç çıta ile bir üçgen oluşturmuştur. Bu üçgenin kenar uzunluklarını karşılaştırmak için evde bulduğu, ölçüleri silinmiş, eski bir cetveli kullanmıştır. D, E ve F noktaları çıtaların orta noktaları olmak üzere cetveli her bir çıtanın üzerine yerleştirdiğinde yandaki şekil ortaya çıkmıştır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız (Çıta kalınlıkları dikkate alınmayacaktır.).

a) Üçgenin iç açılarının ölçülerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

b) En kısa çıtanın uzunluğunun 60 cm, cetvelin uzunluğunun 40 cm olduğu durumda üçgenin çevre uzunluğunun alabileceği en küçük tam sayı değerini bulunuz.

6. Uygulama

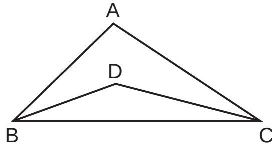


Üçgen Eşitsizliğinin Kullanıldığı Teknoloji Uygulaması

Aşağıda verilen önermeyi inceleyiniz. Verilen adımları sırasıyla uygulayarak soruları cevaplayınız.

Önerme

ABC bir üçgen ve D üçgenin iç bölgesinde bir nokta ise

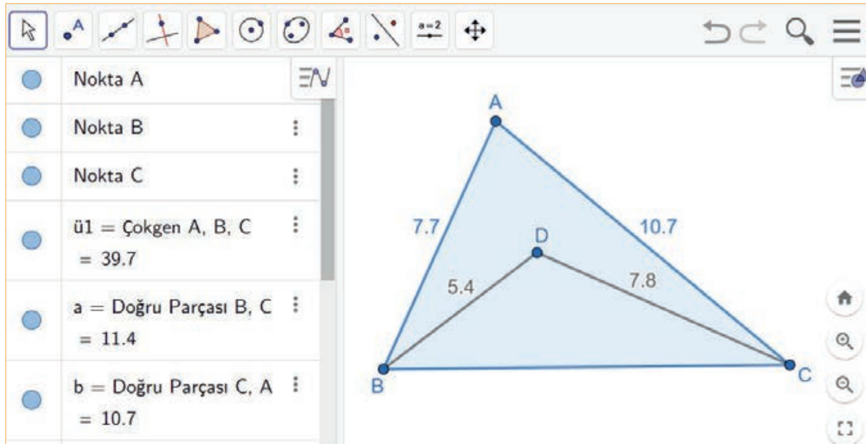


$|DB|+|DC|<|AB|+|AC|$dur.

Matematik yazılımı ile ilgili videoya ulaşmak için karekodu okutunuz.



1. Bilgisayar veya etkileşimli tahtada matematik yazılımını açınız.
2. **Araçlar** bölümünden **Çokgen** aracını seçiniz ve ABC üçgenini oluşturunuz.
3. **Araçlar** bölümünden **Nokta** aracını seçerek ABC üçgeninin iç bölgesinde bir D noktası belirleyiniz.
4. **Araçlar** bölümünden **Doğru Parçası** aracını seçerek $[DB]$ ve $[DC]$ nı çiziniz.
5. **Ölçüm** bölümünden **Uzaklık veya Uzunluk** aracını seçerek sırasıyla $[DB]$, $[DC]$, $[AB]$, $[AC]$ nın uzunluklarını belirleyiniz.



6 ve 7. soruların cevaplarını tabloda uygun yerlere yazınız.

$\lvert DB \rvert$	$\lvert DC \rvert$	$\lvert AB \rvert$	$\lvert AC \rvert$	$\lvert DB \rvert + \lvert DC \rvert$	$\lvert AB \rvert + \lvert AC \rvert$

6. 5. adımda elde ettiğiniz uzunluk değerlerini yukarıdaki tablonun ilk satırına yazınız. Bu değerleri kullanarak $\lvert DB \rvert + \lvert DC \rvert$ ve $\lvert AB \rvert + \lvert AC \rvert$ toplamlarını hesaplayınız ve tablonun ilk satırında ilgili yere yazınız.

7. D noktasını üçgenin iç bölgesinde kalacak şekilde hareket ettirerek [DB], [DC], [AB], [AC] nın uzunluklarındaki değişimi gözlemleyiniz. Elde ettiğiniz değerleri D noktasını hareket ettirdiğiniz her durum için tabloya yazınız.

8. Tabloyu inceleyerek yukarıdaki önermede verilen $\lvert DB \rvert + \lvert DC \rvert$ ve $\lvert AB \rvert + \lvert AC \rvert$ arasındaki ilişkinin doğru olup olmadığına ilişkin fikrinizi arkadaşlarınızla paylaşınız. D noktası A noktası ile çakışırsa nasıl bir sonuç elde edileceğini açıklayınız.

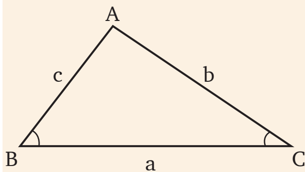
9. Önerme başka bir yol kullanılarak nasıl doğrulanabilir? Açıklayınız.

8. Sıra Sizde

Aşağıda verilen önermenin doğrulamasını matematik yazılımı kullanarak yapınız.

Önerme: Bir üçgenin içinde alınan bir noktanın üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamı üçgenin çevresinin uzunluğundan küçük, çevresinin uzunluğunun yarısından büyüktür.

Kontrol Noktası 



Bir üçgende iki kenar eş değilse bu kenarlardan uzun olanın karşısındaki açının ölçüsü, kısa olanın karşısındaki açının ölçüsünden büyüktür.

Yandaki şekilde $b > c$ ise $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ dür.

Bir ABC üçgeninde a, b, c kenar uzunlukları olmak üzere

$\lvert b - c \rvert < a < b + c$

$\lvert a - c \rvert < b < a + c$

$\lvert a - b \rvert < c < a + b$

eşitsizliklerinin her üçü de sağlanır.

Konu ile ilgili animasyona ulaşmak için karekodu okutunuz.



Performans Görevi

Üçgenlerin Kullanımı ve Üçgen Eşitsizliklerinin Önemi

Üçgenler, sağlamlıkları ve dengeli yapılarıyla birçok alanda kullanılmaktadır. Bu görevde sizden gerçek yaşamda üçgenlerin kullanıldığı yapıları araştırıp seçtiğiniz bir yapının taslağını sınıfta çizmeniz ve çalışmanızı rapor hâlinde sunmanız beklenmektedir.

Göreve başlamadan önce aşağıdaki hususa dikkat ediniz.

- 3 veya 4 kişilik gruplara ayrılarak bir çalışma planı oluşturunuz. Yapılacak işleri bu planda belirtiniz. İhtiyaç duyduğunuzda öğretmeninize danışabilirsiniz.

Görev esnasında aşağıdaki hususlara dikkat ediniz.

- Seçtiğiniz yapının mühendislik standartlarına uygun olması ve güvenli bir şekilde kullanılabilmesi için üçgenlerin iç açılarının kullanımına ve üçgen eşitsizliklerine dikkat ediniz.
- Çalışma sürecinde ekip arkadaşlarınızla iletişiminizi karşılıklı saygı çerçevesinde sürdürünüz.
- Çalışmanızı zamanında teslim etmek için planlı olunuz.

Görev bitiminde aşağıdaki hususlara dikkat ediniz.

- Modelinizi şema ve fotoğraflarla destekleyiniz, araştırma raporunun veya posterin sunumunda Türkçeyi düzgün ve etkili kullanınız.

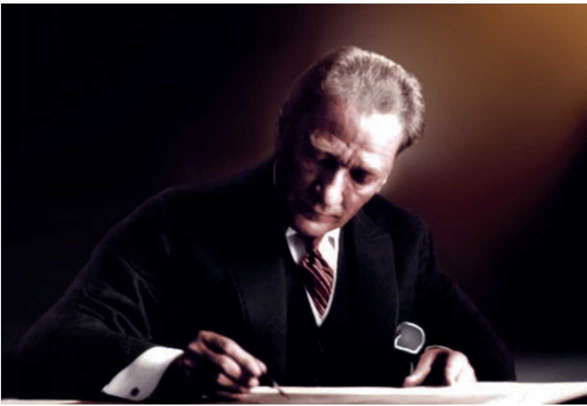
Performans göreviniz aşağıdaki karekodda verilen analitik dereceli puanlama anahtarı ile değerlendirilecektir.

Analitik dereceli puanlama anahtarına ulaşmak için karekodu okutunuz.



Matematik Tarihinden Notlar

Atatürk ve Geometri



Mustafa Kemal Atatürk'ün yazdığı *Geometri* adlı kitap, Türkiye'deki geometri öğretiminin kilometre taşlarından biridir. 3 bölümden oluşan 44 sayfalık bu kitapta birçok geometrik kavram tanıtılmıştır. Atatürk, bu önemli eserinde Arapça ve Farsça kökenli geometri terimleri yerine çoğu günümüzde kullanılmaya devam eden Türkçe geometri terimleri üretmiştir. Bu terimlerin bazıları içinse günümüzde farklı kullanımlar söz konusudur [zâviyetân-ı mütevâfıkatân yerine yöndeş açı, re'sen mütekabil zâviye yerine ters açı, kaim zaviyeli müselles yerine dikey üçgen (günümüzde dik üçgen), müselles-i mütesâviyü'l-adlâ yerine eşkenar üçgen, müselles-i mütesâviyü'ssâkeyn yerine ikizkenar üçgen gibi]. Türk milletini muasır medeniyet seviyesine ulaştırmayı temel gayesi edinen Mustafa Kemal Atatürk, bu çalışmasıyla zaviyetan-ı mütekabiletan-ı dahiletan (iç ters açılar) gibi terimlere dönülmemesini ve dünyada kabul gören çağdaş eğitim literatürüyle uyumlu bir eğitim sisteminin hayata geçirilmesini hedeflemiştir.

Konu ile ilgili etkileşimli içeriğe ulaşmak için karekodu okutunuz.

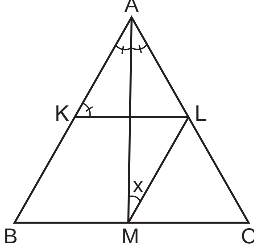




Alıştırmalar

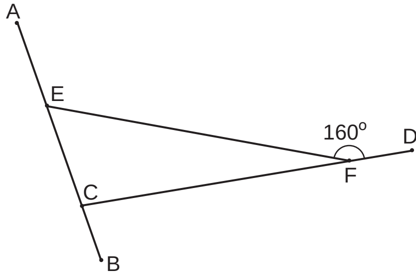
1. Aşağıdaki şekilde ABC üçgen, MLC eşkenar üçgen, $[KL] \parallel [BC]$ ve $m(\widehat{LMA}) = x$ olarak veriliyor.

$m(\widehat{AKL}) = m(\widehat{KAM}) = m(\widehat{LAM})$ ve K, L, M noktaları ABC üçgeninin kenarları üzerindedir.



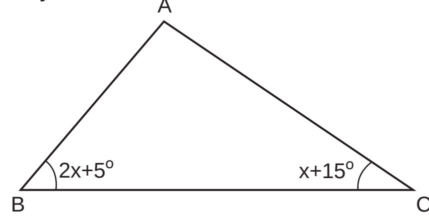
Buna göre $m(\widehat{LMA})$ **nü bulunuz.**

2. Aşağıdaki şekilde ECF üçgen, $E, C \in [AB]$, $F \in [CD]$, $m(\widehat{EFD}) = 160°$ dir.



$5m(\widehat{AEF}) = 6m(\widehat{ECF})$ **olduğuna göre** $m(\widehat{FCB})$ **nü bulunuz.**

3. Aşağıdaki ABC üçgeninde $m(\widehat{B}) = 2x + 5°$, $m(\widehat{C}) = x + 15°$, $|AC| > |AB|$ ve x bir tam sayıdır.



Buna göre $m(\widehat{A})$ **nün alabileceği en büyük tam sayı değerini bulunuz.**

4. Aşağıdaki adımları takip ederek çiziminizi oluşturunuz ve soruyu oluşturduğunuz çizime göre cevaplayınız.

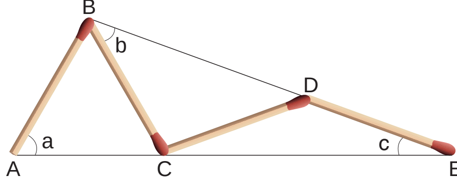
I. A açısı geniş açı olacak şekilde bir ABC üçgeni çiziniz.

II. BC kenarı üzerinde $|AE| = |BE|$ olacak şekilde bir E noktası işaretleyiniz.

III. BC kenarı üzerinde $|AF| = |FC|$ olacak şekilde bir F noktası işaretleyiniz.

$m(\widehat{EAF}) = 24°$ **ise** $m(\widehat{BAC})$ **nü bulunuz.**

5. ABE bir üçgen olmak üzere özdeş kibrit çöpleri aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi yerleştirildiğinde $m(\widehat{BAC}) = a$, $m(\widehat{CBD}) = b$, $m(\widehat{DEC}) = c$, $C \in [AE]$ ve $D \in [BE]$ olur.



Buna göre

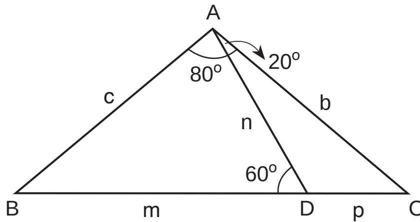
I. $\frac{a}{3} = c$

II. $b = 2c$

III. $b + c = a$

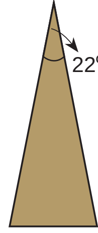
ifadelerinden hangilerinin doğru olduğunu bulunuz (Kibrit çöplerinin kalınlığı dikkate alınmayacaktır.).

6. Aşağıda verilen ABC üçgeninde $D \in [BC]$, $m(\widehat{BAD}) = 80^o$, $m(\widehat{BDA}) = 60^o$ ve $m(\widehat{DAC}) = 20^o$ dir.

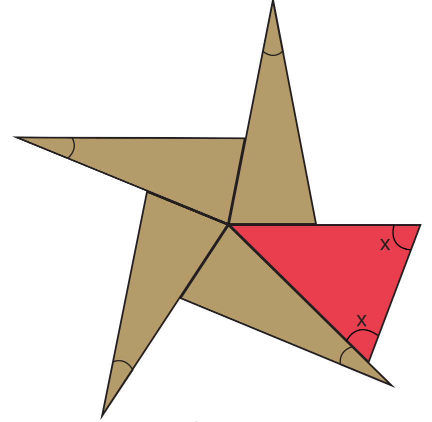


Buna göre b, c, m, n ve p kenar uzunluklarını büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

7. Amblem tasarımı yapan Hikmet, Şekil 1'de gösterilen ikizkenar üçgen biçimindeki dört özdeş kartonu bir masa üzerinde aralarında boşluk bırakmadan birleştiriyor. Tepe açısı 22^o olan dört kartonu birleştirdiğinde meydana gelen boşluğa ise taban açılarının ölçüsü x olacak şekilde kırmızı renkli ikizkenar üçgeni yerleştiriyor ve Şekil 2'deki deseni elde ediyor.



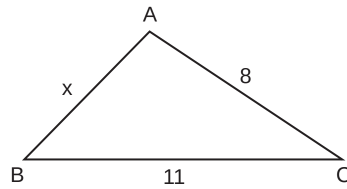
Şekil 1



Şekil 2

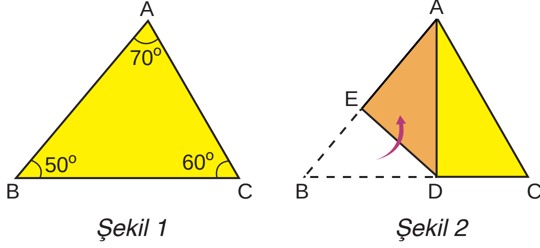
Buna göre x in değerini bulunuz.

8. Aşağıda verilen ABC üçgeninde $|BC| = 11$ cm, $|AC| = 8$ cm ve $m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{ACB})$ dür.



Verilenlere göre $|AB|$ nun alabileceği kaç farklı tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

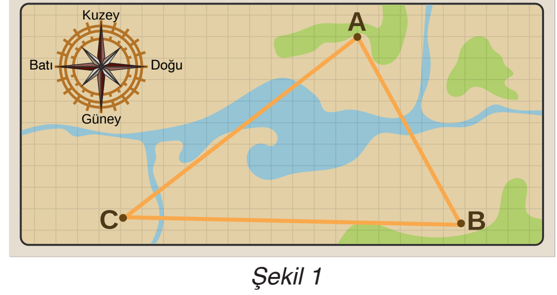
9. Şekil 1'de ABC üçgeni olarak gösterilen üçgen biçimindeki kâğıdın ön yüzü sarı, arka yüzü turuncu renklidir. ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 70^\circ$, $m(\widehat{ABC}) = 50^\circ$ ve $m(\widehat{ACB}) = 60^\circ$ dir. Bu kâğıdın B köşesinin A köşesinin üzerine gelecek biçimde katlanmasıyla oluşan görüntü Şekil 2'de verilmiştir.



Şekil 1 *Şekil 2*

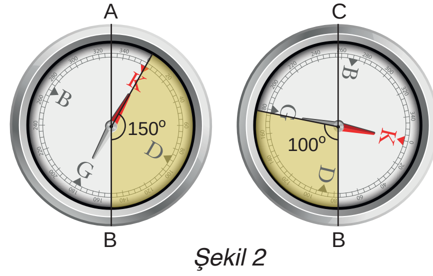
Buna göre $|AC|$, $|AE|$ ve $|BD|$ nu küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

10. Afrika'da gece safarisine çıkan bir grup; A noktasındaki kamp alanından başlayarak sırasıyla B noktasındaki filleri, ardından C noktasındaki aslanları görmüş ve tekrar kamp alanına dönmüştür. Grubun safaride izlediği yol Şekil 1'de ABC üçgeninin kenarları olarak belirlenmiştir.



Şekil 1

Grup, safari boyunca yönünü pusula ile belirlemiştir. A noktasından B noktasına, B noktasından C noktasına gidilirken pusulanın daima kuzeyi gösteren ibresi ile grubun izlediği yol arasındaki açılar Şekil 2'de gösterilmiştir.



Şekil 2

$|AC| = |BC|$ olduğuna göre $m(\widehat{ACB})$ nü bulunuz.

Farklı Kaydet



Bu temada öğrendiğiniz bilgileri kendi hatırlayacağınız şekilde bu alana kısaca not edebilirsiniz.

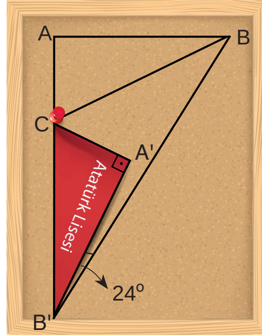
Ölçme ve Değerlendirme

Bu bölümde cevaplamanız için farklı soru tiplerinde 14 adet soru bulunmaktadır.
Ölçme ve değerlendirme bölümünün sonunda verilen karekodu okutarak ek sorulara ulaşabilirsiniz.

1. Mert, evindeki mantar panoya okulunun isminin yazılı olduğu üçgen flamayı Şekil 1'deki gibi A, B ve C köşelerinden asmıştır. A ve B köşelerindeki raptiyelerin zaman içinde düşmesi ile flama Şekil 2'deki gibi A, C, B' noktaları doğrusal olacak biçimde panoda asılı kalmıştır.



Şekil 1



Şekil 2

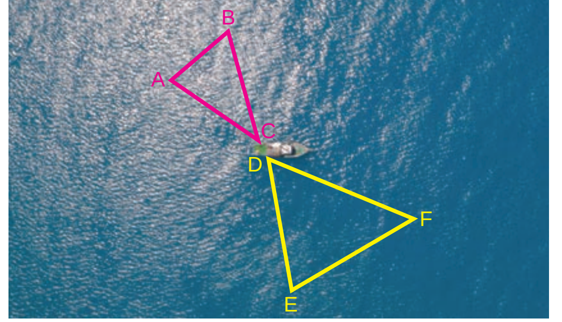
$m(\widehat{A'B'B}) = 24°$ **olduğuna göre** $m(\widehat{CBB'})$ **nü bulunuz.**

2. Aşağıda bir yönetmen sandalyesi görseli verilmiştir. Bu sandalyenin ayakları arasında oluşan ABC üçgeni görsel üzerinde gösterilmiştir.



$|AB| = |AC|$ **ve** $|BC| > |AB|$ **olduğuna göre ABC üçgeninin iç açı ölçülerini büyükten küçüğe doğru sıralayınız.**

3. Türkiye, enerji piyasasındaki gücünü artırmak ve enerji bağımsızlığı yolunda hızla ilerlemek için Doğu Akdeniz'de petrol ve doğal gaz arama çalışmaları yapmaktadır.



Yukarıdaki görselde Barbaros Hayrettin Paşa sismik araştırma gemisinin aramalar sırasında izlediği rota ABC, DEF üçgenleri ile modellenmiştir.

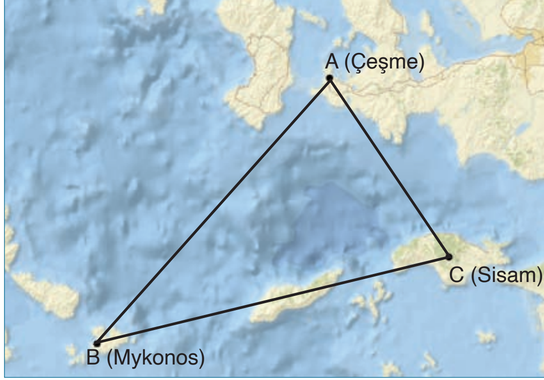
ABC üçgeninde $m(\widehat{CAB}) = 75°$, $m(\widehat{ABC}) = 65°$, DEF üçgeninde $|DE| = 170$ m, $|EF| = 180$ m ve $|DF| = 200$ m olarak verilmiştir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) ABC üçgeninde en uzun kenarı bulunuz.

b) DEF üçgeninde hangi açının ölçüsünün en büyük olduğunu bulunuz.

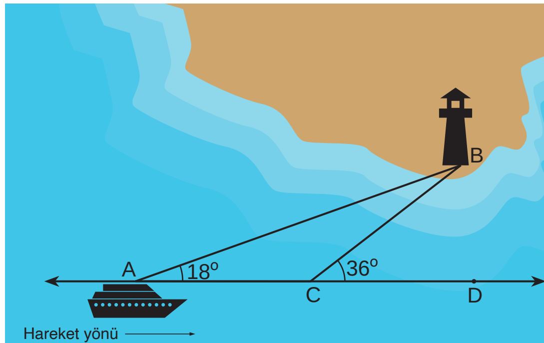
4. Aşağıda harita üzerinde gösterilen ABC üçgeninin köşeleri, Çeşme ilçesinin merkezi ile Mykonos (Mikonos) ve Sisam adalarının merkezlerini belirtmektedir.



$m(\widehat{ACB}) > m(\widehat{BAC})$, Mykonos-Sisam ve Çeşme-Sisam arası kuş uçuşu uzaklıklar sırasıyla 230 km ve 130 km'dir.

Buna göre Çeşme'den Mykonos'a kuş uçuşu uzaklığın alabileceği değer aralığını bulunuz.

5. Pruvadaki açıyı ikiye katlama, denizcilikte kıyıda sabit duran bir cisim ile gemi arasındaki mesafeyi tahmin etmek için kullanılan bir yöntemdir. Aşağıdaki görselde B noktasında bir deniz feneri ve AC doğrusu boyunca hareket eden, saatteki hızı 15 deniz mili olan bir geminin A noktasındaki görüntüsü verilmiştir.



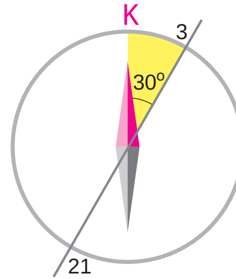
Kaptan, gemi A noktasındayken [AC] ile [AB] arasındaki dar açının ölçüsünü 18° olarak hesaplıyor. Gemi 2 saat doğrusal yol alıp C noktasına vardığında [CB] ile [CD] arasındaki dar açının ölçüsünü 36° olarak hesaplıyor.

Buna göre gemi, C noktasından deniz fenerine doğru saatte ortalama 10 deniz mili hızla doğrusal hareket ederse deniz fenerine kaç saat sonra ulaşır?

6. Aşağıdaki görselde bir havaalanındaki pistlerin yukarıdan görünümü verilmiştir. Her pistin başında ve sonunda pist numaraları yazmaktadır. Pist numaraları, pistin saat yönünde kuzeyle yaptığı açıya göre belirlenmektedir. Pistin kuzeyle yaptığı açının birler basamağındaki 0 rakamı silindikten sonra oluşan numara, pist numarası olarak pistin başına yazılmaktadır. Havaalanı pistleri her zaman doğrusaldır. Bu nedenle pistin başında ve sonunda bulunan sayılar arasındaki fark her zaman 18'dir.

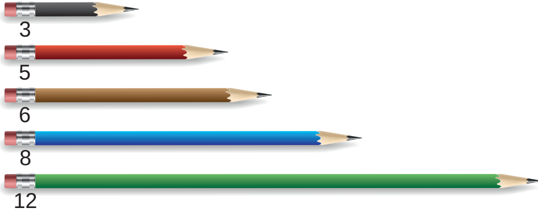


Görselde 3/21 pisti olarak adlandırılan pistin kuzeyle yaptığı açıların ölçülerinin modellemesi verilmiştir. Modellemeye göre pistin 3 yazan tarafı, kuzey yönü ile saat yönünde 30° lik; 21 yazan tarafı ise 210° lik bir açı yapmaktadır ve 8/26 pisti ile x/y pistinin arasında kalan dar açının ölçüsü 70° dir.

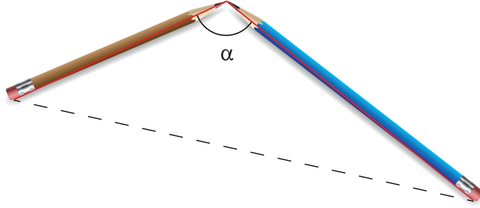


Buna göre görseldeki havaalanında bulunan x/y pistinin adlandırılmasında kullanılan x ve y sayılarının toplamını bulunuz.

7. Erkan'ın Şekil 1'de verilen renkli kalemlerinin uzunlukları sırasıyla 3, 5, 6, 8 ve 12 cm'dir.



Şekil 1



Şekil 2

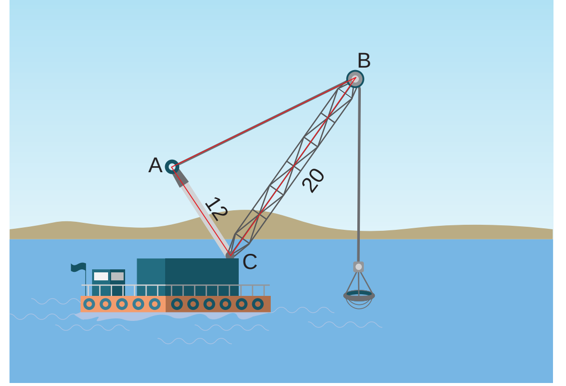
Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız (Kalemlerin kalınlıkları dikkate alınmayacaktır.).

a) Erkan'ın bu kalemlerden herhangi üçünü kullanarak kaç farklı üçgen oluşturabileceğini bulunuz.

b) Erkan, kahverengi ve mavi kalemleri Şekil 2'deki gibi $\alpha > 90^\circ$ olacak biçimde düz bir zemine yerleştirmiştir.

Erkan'ın Şekil 2'deki üçgeni tamamlayabilmesi için Şekil 1'deki kalemlerden kaç tanesini kullanabileceğini bulunuz.

8. Aşağıdaki görselde nehir ağızlarını temizlemek ve nehirleri atıklardan arındırmak için kullanılan bir araç verilmiştir. Araç operatörü, AC kolunu C noktası etrafında hareket ettirerek uzunluğu sabit çelik halatla vincin ucundaki toplama kafesini indirip kaldırabilmektedir.



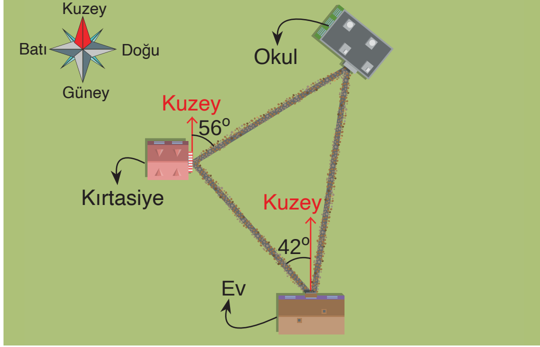
Görselde $|AC| = 12$ m**,** $|CB| = 20$ m **ve toplama kafesi su yüzeyinde olduğuna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.**

a) Toplama kafesi suyun içine girerken AB arasındaki çelik halatın uzunluğu azalır mı, artar mı? Yorumlayınız.

b) A ve B noktaları arasında halatın uzunluğunun alabileceği en büyük tam sayı değerini bulunuz.

c) ACB açısının ölçüsü BAC açısının ölçüsünden büyük değerler almaya başladığında kafesin B noktasına uzaklığı nasıl değişir? Yorumlayınız.

9. Aşağıdaki görselde Ercan'ın evinin, öğrenim gördüğü okulun ve kırtasiyenin konumları gösterilmiştir. Okula gitmek için evden çıkan Ercan önce kırtasiyeye uğraması gerektiğini hatırlamış, kuzey doğrultusu ile 42° lik açı yaparak kuzeybatı yönünde doğrusal şekilde 150 metre yürümüş ve kırtasiyeye ulaşmıştır. Kırtasiyeden çıktıktan sonra kuzey doğrultusu ile 56° lik açı yaparak kuzeydoğu yönünde 150 metre yürümüş ve okula ulaşmıştır.



Buna göre Ercan'ın evden çıkıp doğrudan okula gitmek istemesi durumunda kuzey doğrultusu ile kaç derecelik açı yaparak kuzeydoğu yönünde yol alabileceğini bulunuz (Yol genişliği dikkate alınmayacaktır.).

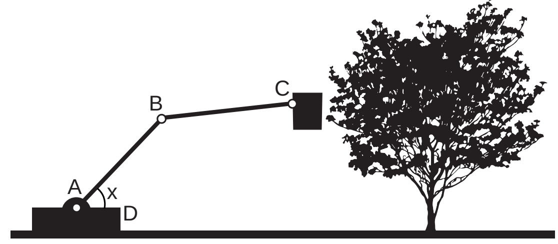
10. Bir ABC üçgeninde BC kenarına ait kenar orta dikme BA kenarını E noktasında, BC kenarını D noktasında kesmektedir.

$|BE| = |AC|$, $m(\widehat{ABC}) = 35^o$ **olduğuna göre BAC açısının ölçüsü kaç derecedir?**

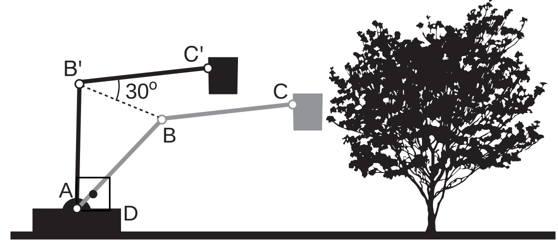
A) 60 B) 65 C) 70 D) 75 E) 80

11. Şekil 1'deki sepetli ağaç budama aracı üzerindeki platform A, B ve C noktalarındaki rulmanlar yardımıyla katlanarak araç üzerine yerleştirilebilmektedir. AB ve BC uzunlukları sabittir. Şekil 1'de $m(\widehat{ABC}) = \frac{9}{2} m(\widehat{BAD})$ dür.

Budama işlemi bittikten sonra platform, rulmanlar yardımıyla A ve B noktalarından katlanarak Şekil 2'deki gibi $[B'C'] \parallel [BC]$ olacak biçimde araç yüzeyine dik konuma getirildiğinde $m(\widehat{BB'C'}) = 30^o$ olmuştur.



Şekil 1

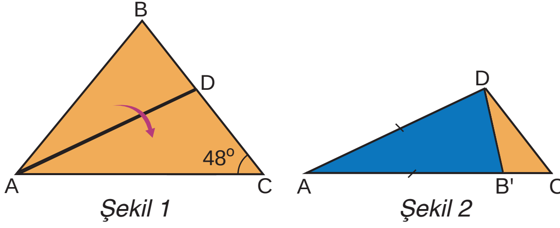


Şekil 2

Verilenlere göre $m(\widehat{BAD}) = x$ **kaç derecedir?**

A) 13 B) 18 C) 27 D) 33 E) 42

12. Şekil 1'deki ön yüzü turuncu, arka yüzü mavi olan üçgen şeklindeki kâğıt, AB ve AC kenarları çakışacak biçimde katlandığında Şekil 2'deki görüntü elde edilmektedir.



$m(\widehat{ACB}) = 48°$, $D \in [BC]$ **ve** $|AD| = |AB'|$ **olduğuna göre ABC açısının ölçüsü kaç derecedir?**

A) 62 B) 66 C) 76 D) 84 E) 86

13. Aşağıda üçgenlerle ilgili bazı bilgiler verilmiştir.

I. Her üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı, bir doğru açının ölçüsüne eşittir.

II. Kenar uzunlukları $|BC| = 12$ cm, $|AC| = 5$ cm ve $m(\widehat{ACB}) = 30°$ olan bir ABC üçgeni çizilebilir.

III. İç açılarının ölçüleri sırasıyla 1, 2 ve 3 sayıları ile orantılı olan bir üçgenin en küçük dış açısı dik açıdır.

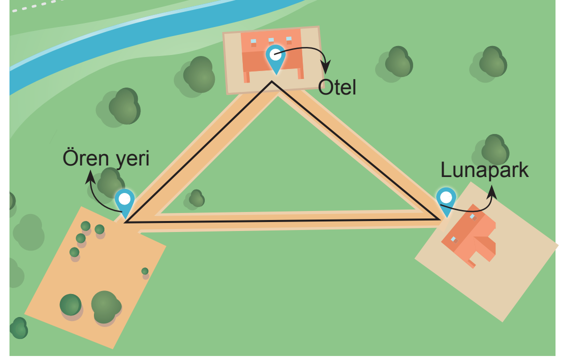
IV. İkizkenar üçgenlerde tepe açısına ait dış açıortay, üçgenin tabanını keser.

Bu ifadelerden hangileri doğrudur?

A) I ve II B) I ve IV C) II ve III

D) I, II, III E) II, III, IV

14. Aşağıdaki görselde bir otobüsün ring seferi yaptığı yol ve bu yol üzerindeki duraklar verilmiştir. Otobüs; otelden aldığı yolcuları lunaparka, lunaparktan aldığı yolcuları ören yerine ve ören yerinden aldığı yolcuları tekrar otele doğrusal yolları takip ederek getirmektedir. Otobüs, lunapark ve ören yeri duraklarında sırasıyla 10 ve 8 dakika beklemiş; yol boyunca başka bir durakta durmayıp duraklar arasında aynı sabit hızla hareket etmiştir.



Otobüsün otel durağından harekete başlayıp tekrar aynı durağa varma süresi 1 saat olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi kesinlikle yanlıştır?

A) Otobüs otelden hareket ettikten 30 dakika sonra ören yerine ulaşmıştır.

B) Lunapark ile ören yeri arası yolculuk 16 dakika sürmüştür.

C) Ören yeri ile otel arası yolculuk 19 dakika sürmüştür.

D) Otel ile lunapark arası yolculuk, lunapark ile ören yeri arasındaki yolculuktan uzun sürmüştür.

E) Yolculuk süresinin en uzun olduğu güzergâh ören yeri ile otel arasıdır.

Tema ile ilgili daha fazla soru çözmek için karekodu okutunuz.



Zenginleştirme bölümüne ulaşmak için karekodu okutunuz.



SÖZLÜK

A-B-D

aksiyom	:	Doğruluğu ispatsız olarak kabul edilen önerme, belit.
akyuvar	:	Kan, lenf gibi vücut sıvılarında bulunan çekirdekli, yuvarlak hücre.
alyuvar	:	Kana al rengini veren, çekirdeksiz, yuvarlak, küçük hücre.
apsis	:	Düzlemdeki bir noktayı belirten sıralı ikilinin birinci bileşeni.
aralık	:	Birbirinden farklı iki sayı arasındaki gerçek sayıların belirttiği küme.
arz	:	Piyasaya mal sürülmesi, sunu.
arz talep	:	Üreticinin piyasaya mal çıkarması ve tüketicinin piyasadan mal çekmesi olayları.
arz talep dengesi	:	Üretimin talebe uygun miktarda planlanması.
atom	:	Birkaç türü birleştiğinde çeşitli molekülleri, bir tek türü ise bir kimyasal ögeyi oluşturan parçacık.
birim	:	Bir niceliği ölçmek için kendi cinsinden örnek seçilen değişmez parça, vahit.
deniz feneri	:	Kıyıların tehlikeli yerlerinde, bazı kaya ve adacıkların üzerinde geceleri deniz taşıtlarına yol gösteren, tepesinde güçlü bir ışık kaynağı olan ışık kulesi; fener.
denklem	:	İçinde yer alan bazı niceliklere ancak uygun bir değer verildiği zaman sağlanabilen eşitlik; muadele.
dik koordinat sistemi	:	Tüm eksenleri birbirine dik olan koordinat sistemi.
direnç	:	Bir nesnenin elektrik akımına karşı dayanma özelliği; mukavemet, rezistans.
düzlem	:	Üzerine, kesişen iki doğrunun her noktasının dokunması gereken yüzey, müstevi.

G-H-I

genel ağ	:	Dünya üzerindeki tüm bilgisayarların birbirine bağlanmasını sağlayan genelleştirilmiş bilgi iletişim ağı.
hipotez	:	Varsayım.
hüküm	:	Yargı.
ışık yılı	:	Işığın bir yılda aldığı yol.

K-M-O-Ö

kalori	:	Besinlerin, dokular içinde yanarak vücudun sıcaklık ve enerjisini sağlama değerlerini gösteren ölçü.
kolesterol	:	Kanda ve büyük ölçüde ödde bulunan, besinlerle alınan sterol.

kurye	:	Posta, kargo, mektup vb. gönderileri alıcıya ulaştıran kimse.
kuş bakışı	:	Yüksek bir yerden aşağıya doğru, bütün genişliği içine alacak biçimde bakış.
mil	:	Türlü işlerde kullanılmak için yapılan ince ve uzun metal çubuk.
model	:	Resim, heykel vb. yapılırken baka baka benzetilmeye çalışılan nesne veya kimse, örnek.
mutlak değer	:	Sayı doğrusu üzerinde alınan bir sayının başlangıç noktasına olan uzaklığı.
ordinat	:	Bir noktanın uzaydaki yerini belirten sıralının ikinci bileşeni.
orijin	:	Dik koordinat sistemini oluşturan yatay doğru ile dikey doğrunun kesim noktası.
önerme	:	Doğru ya da yanlış kesin hüküm bildiren ifadeler.
ören	:	Ait olduğu eski uygarlık hakkında fikir edinmemizi sağlayan kültür ve tabiat kalıntılarından oluşan alan.
özdeşlik	:	İki yanı birbirinin aynı olan veya harflerle verilen sayısal değerler ne olursa olsun iki yanı da sayıca eşit değerler alan eşitlik.

P-R-T

paralel	:	Aynı düzlem içinde ikişer ikişer bulunan ve kesişmeyen, koşut, muvazi, mütevazi.
parçalı gösterimli fonksiyon	:	Tanım kümesinin alt aralıklarında farklı cebirsel temsillerle ifade edilen fonksiyon.
peron	:	Otobüs terminallerinde aracın yanaştığı, yolcuların inip binmesine yarayan bölüm.
pilotaj	:	Bir hava taşıtını yönetme.
plazma	:	Kanda alyuvarlarla akyuvarların içinde bulunduğu sıvı.
pruva	:	Geminin veya sandalın ön tarafı, baş bölümü.
ring	:	Başlangıç ve sonu aynı nokta olan (sefer).
rulman	:	Mekanik ve elektrikli sistemlerde kayma sürtünmesi yerine bir yuvarlanma sürtünmesi sağlayarak enerji kayıplarını azaltmak için yataklar ile muylular arasına yerleştirilen parça.
teorem	:	Doğruluğu kanıtlanabilen önerme.

KAYNAKÇA

Akkuş, R., Boz Yaman B., Bulut S., Duatepe Paksu A., ve Toluk Uçar Z. (2022). *Geometri öğretim bilgisi*. Ankara: Pegem Akademi.

Atatürk, M. K. (2020). *Geometri*. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.

Boynton, R. (2001, Mayıs). Precise measurement of mass. *60th Annual Conference of the Society of Allied Weight Engineers (Vol. 204)* konferansında sunulan bildiri, Arlington, Texas.

Burton, D. M. (1985). *The history of mathematics: An introduction.* Newton, MA: Allyn Bacon.

Bütüner, A. S. (2009). Kemal ATATÜRK, Geometri, Kitap İncelemesi. *Elementary Education Online, 8*(1), 2.

Çengel, Y. A., Boles, M. A., ve Kanoğlu, M. (2019). *Thermodynamics: An Engineering Approach (9. bs.)*. New York, NY: McGraw-Hill Education.

Gillings, R. J. (2019). Mathematics in the time of the pharaohs. D. M. Campbell (Ed.), *Mathematics: People, problems, results,* (s. 9-17) içinde. Boca Raton, FL: CRC Press.

Haese, M., Humphries, M., Sangwin, C. J., & Vo, N. (2019). *Mathematics: Core topics SL. 1 : for use with IB diploma programme (1. bs)*. Australia: Hease Mathematics.

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2013). *Fundamentals of Physics (10. bs.)*. New York, NY: Wiley.

Hirt, C., Claessens, S. J., Kuhn, M., & Featherstone, W. E. (2012). Kilometer-resolution gravity field of Mars: MGM2011. *Planetary and Space Science, 67*(1), 147-154.

Hirt, C., & Featherstone, W. E. (2012). A 1.5 km-resolution gravity field model of the Moon. *Earth and Planetary Science Letters, 329*, 22-30.

Hodgkin, L. (2005). *A history of mathematics: From Mesopotamia to modernity.* New York, NY: Oxford University Press.

Imhausen, A. (2020). *Mathematics in ancient Egypt: A contextual history.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Kaler, J. B. (2002). *The Cambridge Encyclopedia of Stars.* New York, NY: Cambridge University Press.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2013). *Calculus of a single variable (10. bs.)*. Brooks/Cole.

Mudita, U., & Sherly, M. A. (2022). Analysis of large dam storage capacity and its effect on water demand management in India. *Sustainable Water Resources Management: Proceedings of SWARM 2020* içinde (s. 174-180). Singapore: Springer Nature Singapore.

Rehman, S., Bader, M. A., & Al-Moallem, S. A. (2007). Cost of solar energy generated using PV panels. *Renewable and Sustainable Energy Reviews, 11*(8), 1843-1857.

T.C. Millî Eğitim Bakanlığı. (2024). *Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar)*. Ankara.

T.C. Millî Eğitim Bakanlığı. (2024). *Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli Öğretim Programları Ortak Metni.* Ankara

Trotter, M., & Gleser, G. C. (1952). Estimation of stature from long bones of American Whites and Negroes. *American Journal of Physical Anthropology, 10*(4), 463-514.

Kaynakça, APA 6'ya göre hazırlanmıştır.



Cevap anahtarlarına ulaşmak için karekodu okutunuz.

Genel ağ ve görsel kaynakçasına ulaşmak için karekodu okutunuz.



TÜRKİYE'NİN MÜLKİ İDARE BÖLÜMLERİ İLE KARA VE DENİZ KOMŞULARI HARİTASI

BAŞKENT ● Ankara
İL MERKEZİ • Elazığ
GÖL
ÜLKE SINIRI
ÖZERK BÖLGE SINIRI
AKARSU

0 50 100 200 300 400 Km


TÜRK DÜNYASI HARİTASI
Bağımsız Türk Devletleri
Türk Cumhuriyetleri, Türk Bölgeleri
Türk Toplulukları
0 250 500 1,000 1,500 2,000 Km
TÜRK CUMHURİYETLERİ, TÜRK BÖLGELERİ
1 GAGAVUZ YERİ
2 KARAÇAY-ÇERKESYA
3 KABARDİN-BALKARYA C.
4 DAĞISTAN C.
5 ÇUVAŞİSTAN C.
6 TATARİSTAN C.
7 BAŞKURT C.
8 KARAKALPAKİSTAN C.
9 ALTAY C.
10 HAKASYA C.
TÜRK TOPLULUKLARI
a Avrupa'daki Türkler
b Kosova Türkleri
c Yunanistan Türkleri
ç Bulgaristan Türkleri
d Romanya Türkleri
e Suriye Türkmenleri
f Irak Türkmenleri
g İran Türkleri
h Afganistan Türkmenleri
ı Pakistan Türkmenleri
i Hindistan Türkmenleri
j Çin H. C. Türkleri
k Moğolistan Türkleri
l Rusya Federasyonu Türkleri
ÜLKE KISALTMALARI
ARNAVUTLUK ARN
BELÇİKA BEL
BOSNA - HERSEK BH
GÜNEY KIBRIS RUM YÖNETİMİ GKRY
HIRVATİSTAN HRV
İSVİÇRE İS
KARADAĞ KD
KOSOVA KS
KUZEY KIBRIS TÜRK CUMHURİYETİ KKTC
KUZEY MAKEDONYA KMKD
LİHTENŞTAYN LİH
SIRBİSTAN SR
RUSYA FEDERASYONU
KAZAKİSTAN
MOĞOLİSTAN
ÇİN HALK CUMHURİYETİ
HİNDİSTAN
TÜRKİYE
İRAN
AFGANİSTAN
PAKİSTAN
ÖZBEKİSTAN
TÜRKMENİSTAN
KIRGIZİSTAN
TACİKİSTAN
AZERBAYCAN
GÜRCİSTAN
SAHA (YAKUT) C.
TUVA C.
SİNCAN UYGUR ÖZERK BÖLGESİ
Barents Denizi
Kara Denizi
Norveç Denizi
Kuzey Denizi
Akdeniz
Karadeniz
Hazar Denizi
Kızıldeniz
Umman Denizi
Yemen Denizi
Ohotsk Denizi
Bering Denizi